



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis:

1. Einleitung / Grundlagen.....	2
1.1 Vergleichbarkeit von Messergebnissen	2
1.1.1 SI-Einheitensystem	2
1.1.2 Basiseinheiten (Grundeinheiten) des SI	3
1.1.3 Definitionen der Basiseinheiten	3
1.1.4 Abgeleitete SI-Einheiten	5
1.1.5 Dezimale Vielfache und Teile von SI-Einheiten.....	5
1.1.6 SI-fremde Einheiten	6
1.1.7 Gesetzliche Einheiten	6
1.1.8 Einheiten der wichtigsten physikalischen Größenarten	7
1.2 Fehlerrechnung	8
1.2.1 Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messgerät	8
1.2.3 Systematische Fehler.....	10
1.2.4 Garantiefehlergrenze / Klassengenauigkeit	11
1.2.5 Gerätekennzeichnungen.....	13
1.2.6 Schaltungsfehler	15
1.2.7 Zufällige Fehler	17
1.2.8 Fehlerfortpflanzung	20



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1. Einleitung / Grundlagen

1.1 Vergleichbarkeit von Messergebnissen

1.1.1 SI-Einheitensystem

Das Messen ist eine der wichtigsten Aufgaben in der Technik sowie im täglichen Leben. Damit Messergebnisse bewertet und interpretiert werden können, werden Einheiten benötigt. Ein Messwert ohne eine Einheit lässt allenfalls eine Tendenz erkennen, aber eine qualitative Aussage ist nicht möglich.

Messen heißt vergleichen!

Messen – Tatsächliches Ermitteln der Messgröße mit Hilfe geeichter (kalibrierter) Messgeräte oder Messeinrichtungen.

Prüfen – Feststellen der Funktionsfähigkeit einer Anlage mit Hilfe von Messgeräten

Eichen (kalibrieren) – Anpassung eines Messgerätes oder einer Messeinrichtung an die tatsächlich zu Messende Messgröße.

Messen heißt, den Messwert mit einer entsprechenden Einheit oder einer zusammengesetzten Einheit zu vergleichen. Dabei kommt der Definition des Vergleichswertes eine besondere Bedeutung zu.

Damit ein Vergleich auch international möglich ist, wurde 1960 das

Système International d'Unités (abgekürzt SI)

international vereinbart. Dieses „Internationale Einheitensystem“ wird in allen Sprachen der Welt mit SI abgekürzt, seine Einheiten werden als **SI-Einheiten** bezeichnet.

Internationale und nationale Normung ISO 1000, DIN 1301 sowie EWG-Richtlinie 80/181 und 89/617 (EG-Mitgliedsstaaten)



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.1.2 Basiseinheiten (Grundeinheiten) des SI

Das SI-Einheitensystem baut auf 7 Basiseinheiten auch Grundeinheiten genannt auf:

Einheit der Länge	das Meter	(m)
Einheit der Zeit	die Sekunde	(s)
Einheit der Masse	das Kilogramm	(kg)
Einheit der elektr. Stromstärke	das Ampere	(A)
Einheit der Temperatur	das Kelvin	(K)
Einheit der Stoffmenge	das Mol	(mol)
Einheit der Lichtstärke	die Candela	(cd)

1.1.3 Definitionen der Basiseinheiten

- 1 Meter** ist das 1650763,73 fache der Wellenlänge der von Atomen des Nuklids ^{86}Kr beim Übergang in den Zustand $5d_5$ zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten sich im Vakuum ausbreitenden Strahlung.
D.h. die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299792458$ Sekunden durchläuft (1960)
- 1 Kilogramm** ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (1889).
Urkilogramm, Bez. für das Normal der Masseneinheit Kilo-gramm, das in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird: Ein Zylinder aus Platin-Iridium von etwa 39 mm Durchmesser und 39 mm Höhe.
- 1 Sekunde** ist das 9192631770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung (1967)
- 1 Ampere** nach A. M. Ampère, Einheit der elektr. Stromstärke, Einheitenzeichen A; die Stärke eines konstanten elektr. Stromes, der durch zwei parallele, geradlinige, unendl. lange und im



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

Vakuum im Abstand von 1 • Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zw. diesen Leitern je • 1 • Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ ($1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$) hervorrufen würde (1948).

1 Kelvin Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers (1967).

1 Candela ist die Lichtstärke, mit der $(1/600000) \text{ m}^2$ der Oberfläche eines Schwarzen Strahlers bei der temperatur des beim Druck 101325 N/m^2 erstarrenden Platins senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet (1967).

1 Mol Mol [gekürzt aus Molekulargewicht], Einheitenzeichen mol; diejenige Stoffmenge einer Substanz, die aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind (das sind $6,022045 \cdot 10^{23}$ Atome; Avogadro-Konstante) (1971)

Nuklid Atomkerne eines Elementes können eine unterschiedliche Anzahl von Neutronen besitzen. Man bezeichnet sie als Isotope Nuklide oder kurz als Isotope dieses Elementes.

Schwarzer Strahler (schwarzer Körper, Planckscher Strahler), ein idealer Temperaturstrahler, der auftreffende elektromagnet. Strahlung aller Wellenlängen vollständig absorbiert und selbst Strahlung (die *schwarze Strahlung*) entsprechend seiner absoluten Temperatur gemäß den Strahlungsgesetzen abstrahlt.



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.1.4 Abgeleitete SI-Einheiten

Werden SI-Einheiten als Potenzprodukt aus den Basiseinheiten ohne Verwendung von Zahlenfaktoren abgeleitet, so spricht man von

„kohärenten“ Einheiten

Alle Einheiten die nicht wie vorher beschrieben abgeleitet werden können, bezeichnet man als

„inkohärente“ Einheiten

Diese Einheiten sind nicht Bestandteil des SI-Einheitensystems.

Beispiel: Das Watt ist eine kohärente Leistungseinheit, da es sich wie folgt ableiten läßt:

$$1W = 1kg \times m^2 / s^3$$

Das Watt kann also ohne Zahlenfaktor abgeleitet werden!

Das Kilowatt (kW) ist eine inkohärente Leistungseinheit, das es mit Hilfe eines Zahlenfaktors abgeleitet wird.

$$1kW = 10^3kg \times m^2 / s^3$$

1.1.5 Dezimale Vielfache und Teile von SI-Einheiten

Um bei den SI-Einheiten unter Umständen recht umständliche Zahlenwerte zu vermeiden, dürfen durch dezimale Vorsätze neue vergrößerte oder verkleinerte Einheiten gebildet werden. Die gebildeten Einheiten sind dann allerdings nicht mehr kohärent.



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

Die folgende Tabelle zeigt die genormten Vorsätze zur Bezeichnung von dezimalen Vielfachen und Teilen von Einheiten:

Vorsatz	Zeichen	Zahlenwert	Vorsatz	Zeichen	Zahlenwert
Exa-	E	10^{18}	Dezi-	d	10^{-1}
Peta-	P	10^{15}	Zenti-	c	10^{-2}
Tera-	T	10^{12}	Milli-	m	10^{-3}
Giga-	G	10^9	Mikro-	μ	10^{-6}
Mega-	M	10^6	Nano-	n	10^{-9}
Kilo-	k	10^3	Piko-	p	10^{-12}
Hekto-	h	10^2	Femto-	f	10^{-15}
Deka-	da	10	Atto-	a	10^{-18}

1.1.6 SI-fremde Einheiten

Sie sind inkohärent abgeleitet und wegen ihrer Bedeutung in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft für dauernd oder zeitlich begrenzt zugelassen (beispielsweise Torr, Curie, PS). Einige von ihnen sind nur in Spezialgebieten zulässig.

1.1.7 Gesetzliche Einheiten

Mit dem „Gesetz über Einheiten im Messwesen“ vom 2.7.1969 in der Fassung des Gesetzes zur Änderung des Gesetzes über Einheiten im Messwesen vom 6.7.1973 und der „Ausführungsverordnung“ zu diesem Gesetz vom 26.6.1970 wurde festgelegt, dass in Deutschland gesetzliche Einheiten sind (das Gesetz verweist auf DIN 1301):

- » die Basiseinheiten des SI
- » die abgeleiteten SI-Einheiten
- » die dezimalen Vielfachen und Teile von SI-Einheiten
- » bestimmte SI-fremde Einheiten, z.T. mit eingeschränktem Anwendungsbereich Für eine Reihe von Einheiten wurde die Gültigkeit befristet.



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.1.8 Einheiten der wichtigsten physikalischen Größenarten

Größe	Formelzeichen	Einheit, Kurzzeichen, Beziehung	Bemerkung	VT
Oberflächenspannung	σ	N/m = kg/s ² dyn/cm = 10 ⁻³ N/m	SI 77	/
Viskosität, dynamische	η	Pascalsekunde, Pa · s = N · s/m ² = kg/m · s Poise, P = 0,1 Pa · s Zentipoise, cP = 10 ⁻³ Pa · s	SI 77 77	+ + -
Viskosität, kinematische	ν	m ² /s Stokes, St = 10 ⁻⁴ m ² /s Zentistokes, cSt = 10 ⁻⁶ m ² /s	SI 77 77	/
Impuls	p	N · s = kg · m/s	SI	/
Drehimpuls	L	N · m · s = kg · m ² /s	SI	/
Massenträgheitsmoment	J	kg · m ²	SI	/
Temperatur	T	Kelvin, K	BE	+
Celsius-Temperatur	t	Grad Celsius, °C $t = T - T_0$; $T_0 = 273,15$ K	g	-
Temperaturdifferenz	ΔT Δt	Kelvin, K Grad Celsius, °C Grad, grd	BE g 74	+ - -
Wärmemenge	Q	J = kg · m ² /s ² kcal = 4186,8 J	SI 77	+ -
Wärmekapazität	C	J/K = Ws/K = Nm/K = kg · m ² /s ² · K	SI	/
Entropie	S	kcal/K = 4186,8 J/K	77	/
Wärmekapazität, spezifische	c	J/kg · K = m ² /s ² · K kcal/kg · K = 4186,8 J/kg · K	SI 77	/
Wärmeleitfähigkeit	λ	W/m · K = kg · m/s ³ · K kcal/m · h · K = 1,163 W/m · K cal/cm · s · K = 4,1868 · 10 ³ W/m · K	SI 77 77	/
Wärmeübergangskoeffizient	α	W/m ² · K = kg/s ³ · K	SI	/
Wärmedurchgangskoeffizient	k	kcal/m ² · h · K = 1,163 W/m ² · K cal/cm ² · s · K = 4,1868 · 10 ⁴ W/m ² · K	77 77	/
Heizwert	H	J/kg = m ² /s ²	SI	/
Wärmemenge, spezifische	q, r	kcal/kg = 4186,8 J/kg	77	-
Stromstärke, elektrische	I	Ampere, A	BE	+
Elektrizitätsmenge, Ladung	Q	Coulomb, C = A · s	SI	+
Stromdichte, elektrische	S	A/m ²	SI	/
Flächenladungsdichte	σ	C/m ² = A · s/m ²	SI	/
Verschiebungsdichte	D			
Spannung, elektrische	U	Volt, V = W/A = kg · m ² /s ³ · A	SI	+
Widerstand, elektrischer	R	Ohm, Ω = V/A = kg · m ² /s ³ · A ²	SI	+
Leitwert, elektrischer	G	Siemens, S = 1/ Ω = A/V = s ³ · A ² /kg · m ²	SI	+



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.2 Fehlerrechnung

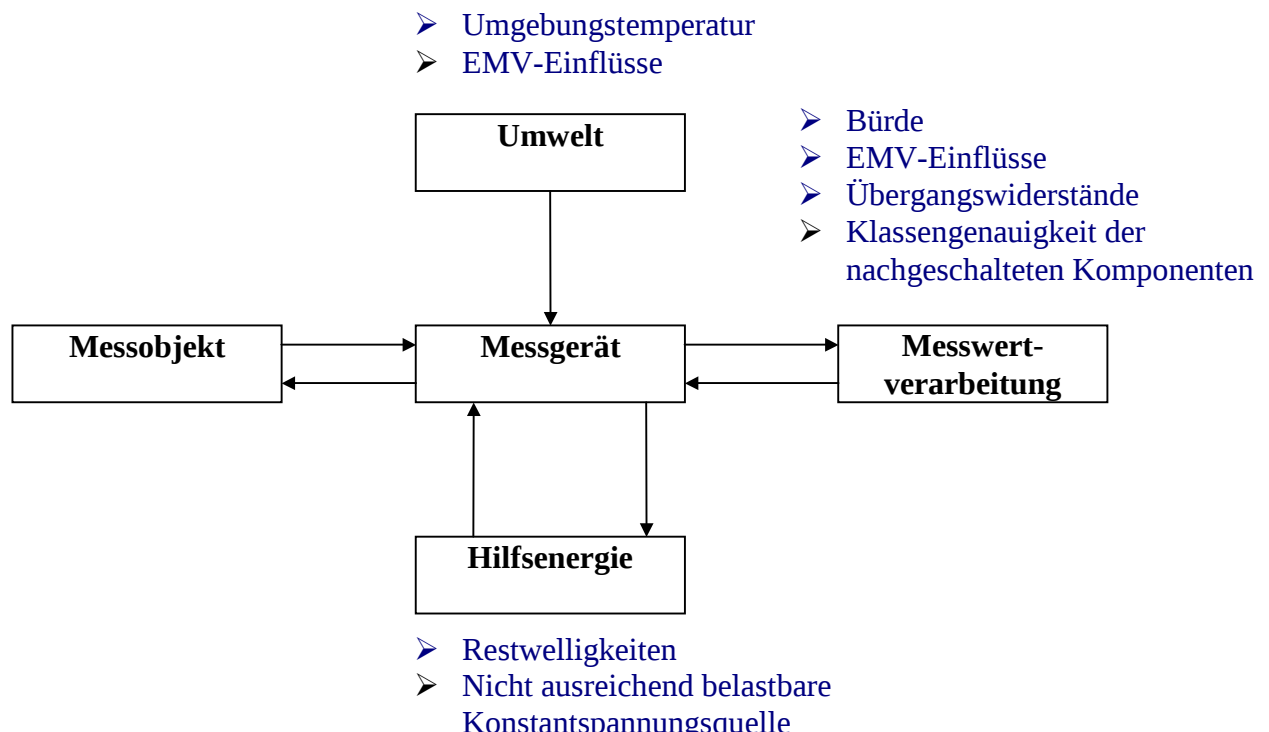
1.2.1 Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messgerät

Eine Messung ist immer mit einem Energie- bzw. Informationsfluss vom Messobjekt zum Messgerät verbunden.

Damit eine Messung auch als exakt und fehlerfrei gelten kann, muss bei jeder Messanordnung darauf geachtet werden, dass das Messgerät durch seinen Einbau das Messergebnis nicht verfälschen kann.

Eine Rückwirkung vom Messgerät auf das Messobjekt ist unbedingt zu vermeiden. Die Praxis zeigt aber, dass sich eine Rückwirkung nie ganz vermeiden lässt.

Die folgende Grafik zeigt möglich Verursacher von Rückwirkungen auf das Messergebnis.



Die sorgfältige Auswertung einer Messung ist ebenso wichtig, wie die Durchführung der Messung selbst!



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.2.2 Definition der Fehler

Auch bei einer rückwirkungsfreien und bestimmungsgemäßen Anwendung der Messgeräte ist das Ergebnis nicht völlig richtig.

Der jeweilige Unterschied zwischen dem gemessenen, angezeigten Wert x und dem wahren Wert x_w der Messgröße wird als Fehler Δx bezeichnet:

$$\Delta x = x - x_w \quad \Delta x = A - W$$

Es gibt zwei Kategorien von Fehlern. Dies sind zum Einen die

systematischen Fehler
zufälligen Fehler

und die

Systematische Fehler erscheinen bei jeder Wiederholung des Messvorganges mit gleichem Wert und gleichem Vorzeichen. Sie lassen sich korrigieren. Umwelteinflüsse können ggf. durch Abschirmung, Temperieren der Messanordnung beseitigt werden. Man spricht im Zusammenhang mit systematischen Fehlern von **Messunrichtigkeit**.

Als Beispiel für systematische Fehler sei hier genannt: **Gerätefehler**

Fehler der Meßmethode
Eichfehler/ Justierfehler
Umwelteinflüsse

Zufällige Fehler wechseln nach Betrag und Vorzeichen. Umwelteinflüsse können stark schwanken und sind dann nicht mehr erfassbar. Da die Messwerte also streuen, spricht man auch von **Messunsicherheit**.



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

Als Beispiel für zufällige Fehler sei hier genannt:

Ablesefehler: Parallaxe
Irrtümer
Umwelteinflüsse

1.2.3 Systematische Fehler

Es gibt zwei Arten von systematischen Fehlern die in der Herstellerangabe „Garantiefehlergrenze“ bereits enthalten sind:

Absoluter Fehler

und

Relativer Fehler

Der absolute Fehler wird wie folgt definiert:

$$\text{Abs. Fehler} = \text{Istwert} - \text{Sollwert}$$

d.h.

$$\Delta X = X - X_w$$

$$\Delta X = A - W$$

Der absolute Fehler ΔX wird unter der Verwendung der Einheit vom Hersteller angegeben. Dieser Wert ist **dimensionsbehaftet**.

Der relative Fehler wird wie folgt definiert:

$$f_{\%} = 100\% \cdot (\text{Istwert} - \text{Sollwert}) / \text{Sollwert}$$

d.h.

$$f_{\%} = 100\% \cdot (X - X_w) / X_w = 100\% \cdot \Delta X / X_w$$

Dieser Wert wird in % angegeben.



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

Beispiel:

Gegeben: $x = 10,23V$
 $x_w = 9,98V$

Gesucht: Absoluter Fehler ?
Relativer Fehler ?

$$\Delta x = 10,23V - 9,98V = \underline{0,25V}$$

$$f_{\%} = 100\% \cdot (10,23V - 9,98V) / 9,98V = \underline{2,50\%}$$

1.2.4 Garantiefehlergrenze / Klassengenauigkeit

Die gebräuchlichste Herstellerangabe für die Definition der Messgenauigkeit ist die. Garantiefehlergrenze. Bei dieser Angabe gibt der Hersteller relativen Fehler seines Messgerätes aber bezogen auf den Messbereichsendwert an. Diese Fehlerangabe wird wie folgt definiert:

$$f_{\% \text{ KG}} = 100\% \times (\text{Istwert} - \text{Sollwert}) / \text{Messbereichsendwert}$$

Die Einflussgrößen die auftreten können und die in der Angabe der Garantiefehlergrenze (Klassengenauigkeit) berücksichtigt werden müssen sind genormt.

Betriebslage, Temperatur, Frequenz des Messsignals, Hilfsspannung, Fremdfeld sind einige Einflussgrößen.

Die Grundlage für die Berücksichtigung der Einflussgrößen in der Angabe der Garantiefehlergrenze bzw. Klassengenauigkeit, bildet die DIN 43780.



Die Klassengenauigkeit von Messgeräten wird in der Praxis wie folgt unterteilt:

	Feinmeßgeräte			Betriebsmeßgeräte			
Elektrische Messgeräte	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2,5	5
Messwandler	0,1	0,2	0,5	1		3,0	
Druckmessgeräte		0,3	0,6	1	1,6	2,5	4

Die Angaben in der Tabelle sind %-Angaben.

Beispiel:

Gegeben: Messbereichsendwert = 75V,
Klassengenauigkeit = $\pm 1,5\%$

Für einen Messbereich von 75V folgt: $F_{KG} = \pm 1,5\% \cdot 75V / 100\% = \pm 1,125V$

a) Beträgt der Messwert nun 10V, liegt der wahre Wert zwischen $10V \pm 1,125V$

$$10V - 1,125V = 8,875V \quad \text{bzw.} \quad 10V + 1,125V = 11,125V$$

Bezogen auf den Messwert kann man festhalten, dass es zu einer Abweichung von

$$f_{\%} = \pm 1,125V \cdot 100\% / 10V = \pm 11,25\%$$

b) Beträgt der Messwert nun 50V folgt: $50V \pm 1,125V$

$$50V - 1,125V = 48,875V \quad \text{bzw.} \quad 50V + 1,125V = 51,125V$$



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

Bezogen auf den Messwert kann man festhalten, dass es zu einer Abweichung von

$$f_{\%} = \pm 1,125V * 100\% / 50V = \pm 2,25\%$$

Fazit: Je näher der zu messende Messwert am Messbereichsendwert liegt, um so kleiner wird der absolute bzw. relative Fehler!

Das ist u.A. die Erklärung für die Aussage, dass man bei analogen Messgeräten immer im letzten Skalendrittel liegen soll!

1.2.5 Gerätekenzeichnungen

Neben der Angabe der Klassengenauigkeit findet man bei Analoginstrumenten weitere Angabe auf der Messskala, die der Benutzer berücksichtigen muss damit er möglichst fehlerarme Messergebnisse erhält.

Bei analogen Messgeräten spielt die Betriebslage eine große Rolle für die Messgenauigkeit. Die Lage in der das Messgerät zu betreiben ist



senkrechte Betriebslage



waagerechte Betriebslage



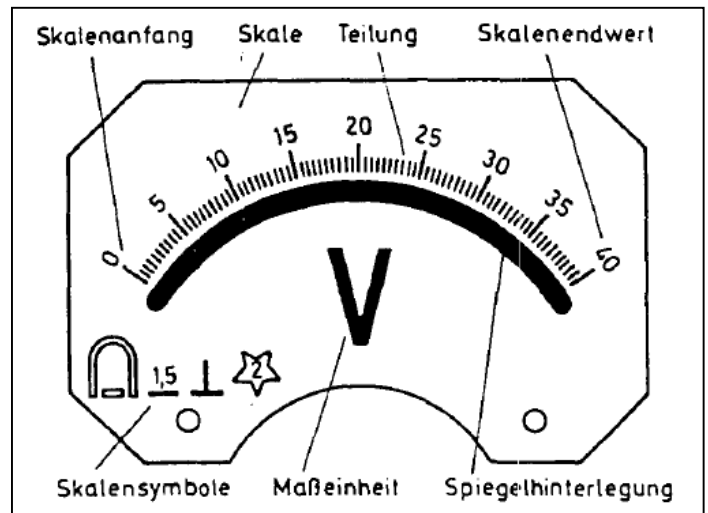
schräge Betriebslage

Beachtet man die Gebrauchslage nicht, so kann es zu größeren **Umkehrspannen** kommen. Die Umkehrspanne ist die Differenz zwischen den Messwerten bei ansteigendem Messwert und fallendem Messwert. Es ergibt sich in einem Diagramm eine Hysteresekurve, wenn y = Zeigerausschlag ist und x = Messstrom I_M .



Weitere Symbole sind:

Skala eines Analogmessgerätes



Skalensinnbilder gemäß DIN 43802:

— für Gleichstrom	↗ Hinweis auf getrennten Nebenwiderstand	⚡ Dreheisen-Quotientenmeßwerk
~ für Gleich- und Wechselstrom	↘ Hinweis auf getrennten Vorwiderstand	⚡ Elektrodynamisches Meßwerk (eisenlos)
~ für Wechselstrom	○ Magnetischer Schirm (Eisenschirm)	⚡ Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk (eisenlos)
≡ für Drehstrom mit einem Meßwerk	⊖ Elektrostatischer Schirm	⊖ Elektrodynamisches Meßwerk (eisengeschlossen)
≡ für Drehstrom mit zwei Meßwerken	ast Astatistisches Meßwerk	⊖ Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk (eisengeschlossen)
≡ für Drehstrom mit drei Meßwerken	⚠ Achtung (Gebrauchsanleitung beachten)!	⊖ Induktionsmeßwerk
15 Klassenzeichen, bezogen auf Meßbereich-Endwert	⌋ Drehspulmeßwerk	⊖ Induktions-Quotientenmeßwerk
15 Klassenzeichen, bezogen auf Skalenlänge bzw. Schreibbreite	⌋ als Gleichrichter	⌋ Hitzdrahtmeßwerk
15 Klassenzeichen, bezogen auf richtigen Wert	⌋ zu Thermoumformer	⌋ Bimetallmeßwerk
⌋ Senkrechte Nennlage	⌋ isol. Thermoumformer	⌋ Elektrostatisches Meßwerk
⌋ Waagerechte Nennlage	⌋ Drehspul-Quotientenmeßwerk	⌋ Vibrationsmeßwerk
⌋ Schräge Nennlage (mit Neigungswinkelangabe)	⌋ Drehmagnetmeßwerk	⌋ mit eingebautem Verstärker
☆ Prüfspannung	⌋ Drehmagnet-Quotientenmeßwerk	
	⌋ Dreheisenmeßwerk	



Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.2.6 Schaltungsfehler

Aus der Praxis kann man feststellen, dass die häufigsten Fehler beim Aufbau einer elektrischen Messschaltung unter Verwendung eines elektrischen Messgerätes für die direkte Messung von Strom und Spannung folgende Fehler sind:

- Falscher Messbereich (gilt auch für Digitalmessgeräte)
- Messgerät mit schlechter Klassengenauigkeit
- Messgeräte mit schlecht dimensionierten Innenwiderständen

Bei analogen oder digitalen elektrischen Messinstrumenten ist die Größe des Innenwiderstandes besonders wichtig.

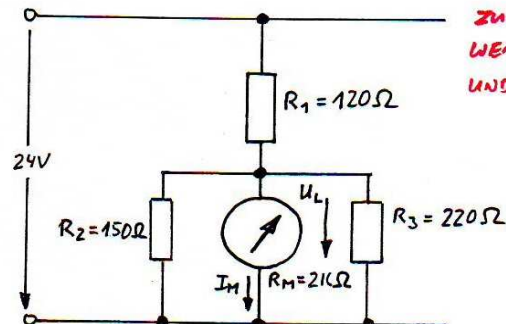
Die Messleistung ist möglichst klein zu halten !

Das heißt: $P_M = U^2 / R_M$ oder $P_M = I^2 \cdot R_M$

Der Innenwiderstand eines Spannungsmessgerätes sollte möglichst gegen unendlich streben, wohin der Innenwiderstand eines Strommessgerätes möglichst gegen Null streben sollte.



Beispiel:



ZUM THEMA WAHREN
WERT, ANGEZEIGTER WERT
UND FEHLER

1. BESTIMMUNG DES WAHREN WERTES (SOLLWERT) (W):

$$R_G = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 120\Omega + \frac{150\Omega \cdot 220\Omega}{150\Omega + 220\Omega} = 120\Omega + 89,19\Omega$$

$$R_G = 209,19\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{24V}{209,19\Omega} = 0,115A$$

$$U_L = I \cdot R_L' = 0,115A \cdot 89,19\Omega = 10,23V = (W)$$

2. BESTIMMUNG DES ANGEZEIGTEN WERTES (ISTWERT) (A)

$$R_G = 120\Omega + \frac{1}{\frac{1}{150\Omega} + \frac{1}{2k\Omega} + \frac{1}{220\Omega}} = 120\Omega + 85,38\Omega$$

$$R_G = 205,38\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{24V}{205,38\Omega} = 0,1168A$$

$$U_L' = I \cdot R_L'' = 0,1168A \cdot 85,38\Omega = 9,977V = (A)$$

WÄHLT MAN NUN EIN MESSGERÄT MIT EINEM MESSBEREICH VON 0-100V UND EINER KLASSENGENAUIGKEIT VON 2,5 SO ERGIBT SICH FOLGENDES BEISPIEL:

$$\text{REL. FEHLER} = f_{\%} = 2,5\%$$

$$\pm \Delta U = \pm \frac{2,5\%}{100\%} \cdot 100V$$

$$\pm \Delta U = 2,5V$$

$$U_L' \pm \Delta U = 9,98V \pm 2,5V \Rightarrow U_{L \min}' = 7,48V$$

$$U_{L \max}' = 12,48V$$

UNSICHERHEITS-
BEREICH:

IN DIESEM
BEREICH WIRD
SICH DER ZEIGER
EINSTELLEN

FAZIT: DER MESSBEREICH IST VIEL ZU GROSS UND DAMIT FALSCH
GEWÄHLT!



1.2.7 Zufällige Fehler

Zufällige Fehler werden hervorgerufen durch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen der Messgeräte, des Beobachters und der Umwelt. Betrag und Vorzeichen dieser definitionsgemäß nicht vorhersehbaren Fehler können im einzelnen nicht angegeben werden.

Die Folge ist, dass die wiederholte Messung ein und derselben Messgröße unterschiedliche, streuende Messwerte ergibt. In diesen Fällen wird aus dem Messwert x_i der Mittelwert $\bar{x}$ gebildet und dieser wird als der Erwartungswert der Messgröße, als der wahre Messwert x_w angesehen:

$$\bar{x} = x_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

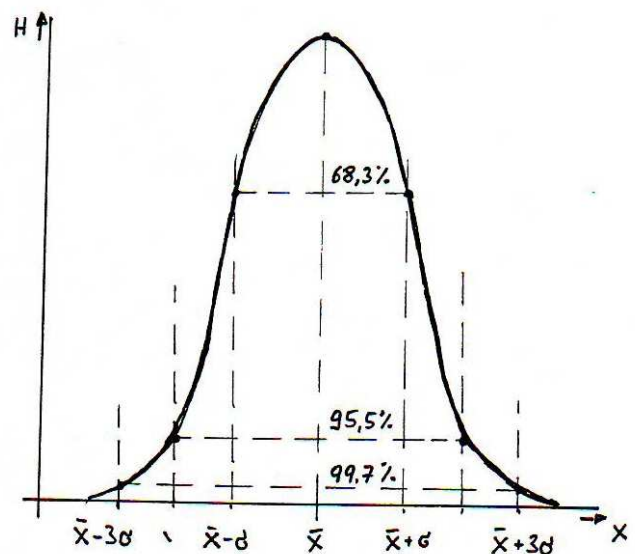
x_i = EINZELNER MESSWERT

$\bar{x}$ = MITTELWERT

x_w = WAHRE MESSWERT
(ERWARTUNGSWERT)

Waren genügend viele voneinander unabhängige Einflussgrößen wirksam und wurden genügend viele Einzelmessungen durchgeführt, so sind die Messwerte normalverteilt.

**68% aller Messwerte liegen
im Bereich von $x = \pm \sigma$!**



H = Häufigkeit

σ = VARIANZ (STREUUNG)



FEHLERRECHNUNG "ZUFÄLLIGER FEHLER"

$$f_i = M_i - D$$

SCHEINBARE FEHLER

D = WAHRSCHEINLICHE WERT EINER GRÖSSE M

M_i = EINZELNE MESSGRÖSSE AUS EINER REIHE $M_1 - M_n$

$$D = \bar{M} = \frac{\sum M_i}{n}$$

ARITHMETISCHE MITTELWERT EINER MESSREIHE MIT n MESSUNGEN

n = ANZAHL DER MESSUNGEN

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum f_i^2}{n-1}}$$

VARIANZ;

STANDARDABWEICHUNG

DIE STREUUNG DER EINZELMESSWERTE UM IHREN MITTELWERT $\bar{M}$ WIRD ALS STANDARDABWEICHUNG s BEZEICHNET.

BEISPIEL:

EINE MESSREIHE AUS ZEHN EINZELBEOBACHTUNGEN HAT FOLGENDE MESSWERTE ERGEBEN: 2,55 / 2,57 / 2,47 / 2,59 / 2,52 / 2,42 / 2,46 / 2,53 / 2,42 / 2,46
WIE GROSS IST DIE STANDARDABWEICHUNG?

MESSUNGEN n	MESSWERT M_i	FEHLER f_i	FEHLERQUADR. f_i^2
1	2,55	+0,051	0,00260
2	2,57	+0,071	0,00504
3	2,47	-0,029	0,00084
4	2,59	+0,091	0,00828
5	2,52	+0,021	0,00044
6	2,42	-0,079	0,00624
7	2,46	-0,039	0,00152
8	2,53	+0,031	0,00096
9	2,42	-0,079	0,00624
10	2,46	-0,039	0,00152
$\sum M_i =$	24,99	$\sum f_i^2 =$	$336,8 \cdot 10^{-4}$

$$f_i = M_i - \bar{M}$$

$$\bar{M} = \frac{\sum M_i}{n} = \frac{24,99}{10} = 2,499$$

$$f_{i1} = 2,55 - 2,499$$

$$f_{i1} = +0,051$$

$$f_{i1}^2 = 0,051 \cdot 0,051$$

$$f_{i1}^2 = 0,00260$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum f_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{336,8 \cdot 10^{-4}}{10-1}} = \pm 0,0612 \approx \pm 0,06$$

DAS ERGEBNIS DER SIEBTEN EINZELMESSUNG Z.B. LAUTET
DANN:

$$M_7 = 2,46 \pm 0,06$$

ANMERKUNG: ZEHN EINZELMESSUNGEN SIND EIN RELATIV KLEINER WERT. DIE STANDARDABWEICHUNG s WIRD MIT ZUNEHMENDER ANZAHL n GENAUER.



DER ZUFÄLLIGE FEHLER KANN DANN IM MITTEL WIE FOLGT BESCHRIEBEN WERDEN:

$$f = \bar{m} \pm s$$

$$\underline{\underline{f = 2,499 \pm 0,06}} \Rightarrow f = 2,50 \pm 0,06$$

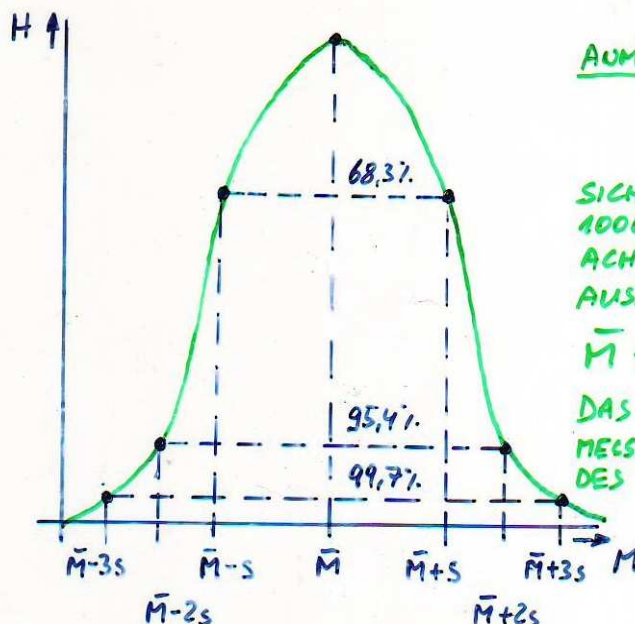
ES IST LEICHT EINZUSEHEN, DASS IM BEREICH $\bar{m} \pm s$ NICHT ALLE EINZELWerte FÜR DIE GESUCHTE MESSGRÖSSE LIEGEN KÖNNEN.

WENN EINE NORMALE ZUFALLSVERTEILUNG (GAUSS) DER EINZELNEN WERTE VORLIEGT, FALLEN IM MITTEL VON 1000 UNABHÄNGIGEN EINZELWERTEN

683 IN DEN BEREICH $\bar{m} \pm 1s$ (STATISTISCHE SICHERH. $P=68,3\%$)

954 IN DEN BEREICH $\bar{m} \pm 2s$ (" " $P=95,4\%$)

997 " " " $\bar{m} \pm 3s$ (" " $P=99,7\%$)



ANMERKUNG: IN DER INDUSTRIE BEVORZUGT MAN EINE STATISTISCHE

SICHERHEIT VON $P=95\%$. VON 1000 UNABHÄNGIGEN BEOBSACHTUNGEN FALLEN HIERBEI 50 AUSSENHALB DES BEREICHS

$$\bar{m} \pm 1,96s$$

DAS BEDEUTET, DASS VON 20 EINZELMESSWERTEN, EIN WERT AUSSENHALB DES BEREICHS LIEGT.

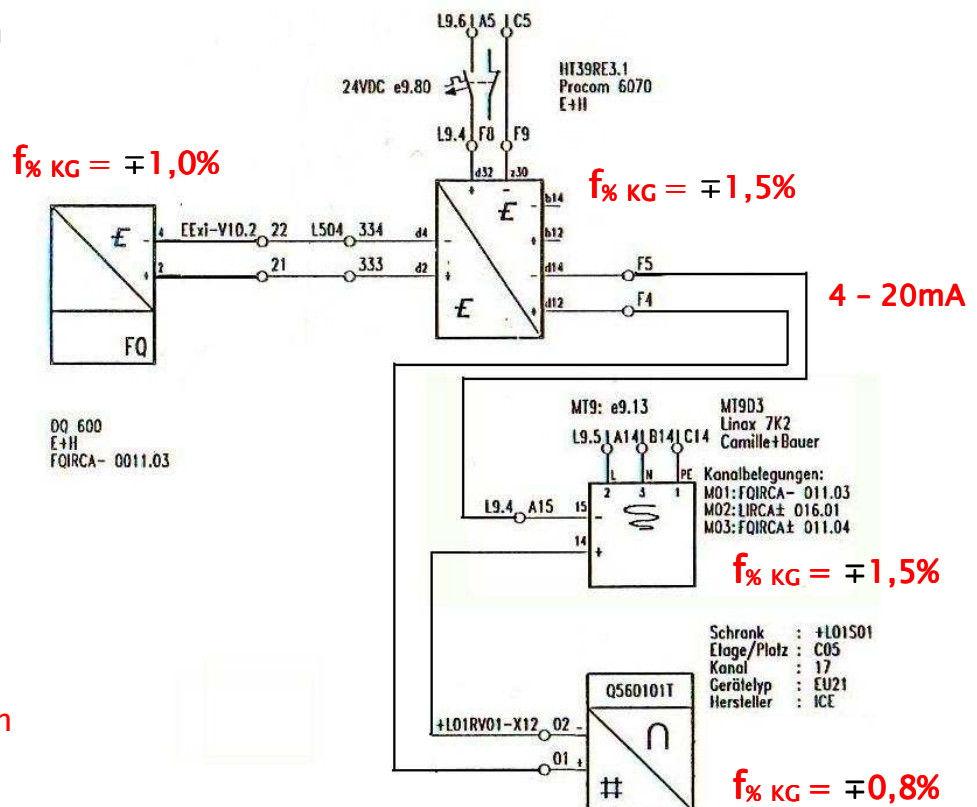


Ingenieurwesen II	Messtechnik	Dipl.-Ing. (FH) M. Trier
Elektrotechnik (BEII)	Grundlagen Teil 1	26. Dezember 2011

1.2.8 Fehlerfortpflanzung

In den wenigsten Fällen ist das Beobachtungsergebnis gleichzeitig das Endergebnis der Messung. Im allgemeinen setzt sich das Messergebnis aus verschiedenen Einzelmesswerten oder den beeinflussenden Elementen einer Messkette zusammen, die aber alle mit einem gewissen Fehler behaftet sind. Nun interessiert der Fehler des Resultates.

Beispiel einer klassischen
Messkette:



Man unterscheidet nun
zwei Fälle:

- Fortpflanzung von systematischen Fehlern
- Fortpflanzung von zufälligen Fehlern

Einfache Worst Case Betrachtungen scheiden als Mittel den Gesamtfehler zu ermitteln aus. Die Fortpflanzung des systematischen Fehlers, kann nicht durch einfaches addieren der Einzelfehler ermittelt werden, da die Einzelfehler sich durchaus gegenseitig aufheben können. Die Fehlerfortpflanzung des zufälligen Fehlers kann nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung versucht werden zu bestimmen.