Inhaltsverzeichnis:

1. Einleitung / Grundlagen

1.1 Messtechnik

Die Messtechnik wird bezeichnet als Gesamtheit der Verfahren und Geräte zur Messung zahlenmäßig erfassbarer Größen in Wissenschaft und Technik.

Die Grundlage der Messtechnik ist die Bestimmung von Basisgrößen, wie Länge, Masse, Zeit und Temperatur, die in Absolut- oder Fundamentalmessung unterscheidet werden kann. Die Messtechnik dient als Kontrollfunktion und überprüft unter anderem die Einhaltung von Maßtoleranzen in der Fertigungstechnik. Außerdem dient die Messtechnik zur Verbrauchszählung in der Energietechnik und überwacht die Steuerung technischer Prozesse. Die elektrische Messtechnik gewinnt an besonderer Bedeutung, da neben der Messung der elektrischen Größen, wie z.B. Spannung und Leitfähigkeit, für fast alle nicht-elektrischen Größen, mit Hilfe eines Messwandlers, geeignete elektrische Signale gewonnen werden können. Sie sind einfach zu digitalisieren und eignen sich zur direkten Weiterverarbeitung (z.B. in Rechenanlagen). In der Nano- und Mikrotechnologie werden unter anderem Fernrohre (1608 entwickelt) und Mikroskope (1620 entwickelt) für die optische Messtechnik eingesetzt, die ein berührungsloses Messverfahren ermöglichen.

1.1.1 Geschichte der Messtechnik

Das Messen und die Messtechniken entwickelten sich im Laufe der Zeit auf unterschiedliche Weise. Schon 4000 vor Christus begann die Zeit der Messtechnik, indem die Längeneinheit des Fußes für die Vermessung der Felder eingeführt wurde. Die Längeneinheiten die auf den Fuß, Ellbogen oder einem Schritt bezogen wurden, nutze man bis ins 19. Jahrhundert.

Ein **Fuß** (engl. *foot,* Plural *feet*) bzw. **Schuh** ist ein früher in vielen Teilen der Welt verwendetes Längenmaß, das je nach Land meist 280 bis 320 mm maß, in Extremfällen auch 250 und 340 mm. Es ist neben

- der **Fingerbreite** (ca. 18 – 19mm),
- der **Handbreite** (ca. 5 Fingerbreit ca. 100mm),
- der **Handspanne** (ca. 200mm),
- der **Elle** (ca. 500 – 600mm, war selbst in Deutschland unterschiedlich),
- dem **Schritt** (ca. 710 – 750mm),
- und dem **Klafter** (ca. 6 Fuß also ca. 1.800mm)

eine der ältesten Längeneinheiten.

Das einzige heute noch übliche Fußmaß, der *englische Fuß.* Gemeint ist damit immer der internationale Fuß („angelsächsischer Kompromissfuß“, 1959), der einem Drittel Yard oder zwölf internationalen Zoll je 2,54 cm entspricht, also exakt 30,48 cm misst: 1 ft = 1′ = 12 in. = ⅓ yd. = 30,48 cm = 0,3048 m = etwa 1/6000 Seemeile. 1 m = etwa 3,2808 ft.

Das erste einheitliche Maß- und Gewichtsystem „Karlspfund“, wurde ca. 793 n. Christus unter Karl dem Großen eingeführt. Der Karlspfund diente als Handels- sowie als Münzengewicht. Die Gewichtsmaße spielen im täglichen Leben als Mengen- und Wertmesser eine besonders wichtige Rolle.

Das erste entwickelte Gerät für die Messtechnik ist der Kompass. Zwischen 475 v. Chr. und 221 v. Chr. War es den antiken Griechen und den Chinesen bekannt, dass sich Splitter von Magneteisenstein in die Nord-Süd-Richtung drehen. Im 11. Jahrhundert benutzten die Chinesen eine schwimmende, nasse Kompassnadel, die allerdings nicht nach Norden sondern nach Süden zeigte. Um das Jahr 1400 herum, bauten die europäischen Seefahrer die trockene Kompassnadel und Windrose in ein festes Gehäuse ein, damit es fest auf ihren Schiffen stationiert werden konnte.

Auch die Zeitmessung verfügte schon damals über interessante Messtechniken. Für die Zeitmessung kamen in Europa im 13. Jahrhundert Uhren mit Räderwerk auf. Heute werden für die höchste Genauigkeit der Zeitmessung Quarz- und Atomuhren genutzt.

Das Messen und Wiegen wurde im 17. Jahrhundert zur Grundlage naturwissenschaftlichen Arbeitens. Somit begann die Entwicklung physikalischer Geräte für die Messtechnik. Ab 1785 wurden Messschrauben für die wachsenden Anforderungen an die Messgenauigkeit entwickelt.

Der Meter wurde 1799 definiert und ist die Basiseinheit der Länge im internationalen Einheitssystem. Mit dieser Messtechnik wurde das große Durcheinander der Maßeinheiten beendet. Der große Durchbruch in einem einheitlichen System kam jedoch erst über 1000 Jahre später. 1860 schlägt der deutsche Bundesrat vor, ein einheitliches System zur Definition zu schaffen. Im Jahr 1868 wird mit der Gewichts- und Maßordnung durch den Norddeutschen Bund in den meisten Teilen von Deutschland ein einheitliches metrisches System eingeführt, was sich auch durch setzte.
Seit 1960 gilt das Internationale Einheitssystem und definiert die Basiseinheiten Sekunde, Ampere, Meter, Kilogramm, Candela und Kelvin.

1.2 Vergleichbarkeit von Messergebnissen

1.2.1 SI-Einheitensystem

Das Messen ist eine der wichtigsten Aufgaben in der Technik sowie im täglichen Leben. Damit Messergebnisse bewertet und interpretiert werden können, werden Einheiten benötigt. Ein Messwert ohne eine Einheit lässt allenfalls eine Tendenz erkennen, aber eine qualitative Aussage ist nicht möglich.

Messen heißt vergleichen!

Messen - Tatsächliches Ermitteln der Messgröße mit Hilfe geeichter (kalibrierter) Messgeräte oder Messeinrichtungen.

Prüfen - Feststellen der Funktionsfähigkeit einer Anlage mit Hilfe von Messgeräten

Eichen (kalibrieren) - Anpassung eines Messgerätes oder einer Messeinrichtung an die tatsachlich zu Messende Messgröße.

Messen heißt, den Messwert mit einer entsprechenden Einheit oder einer zusammengesetzten Einheit zu vergleichen. Dabei kommt der Definition des Vergleichswertes eine besondere Bedeutung zu.

Damit ein Vergleich auch international möglich ist, wurde 1960 das

Système International d`Unités (abgekürzt SI)

international vereinbart. Diese „Internationale Einheitensystem“ wird in allen Sprachen der Welt mit SI abgekürzt, seine Einheiten werden als **SI-Einheiten** bezeichnet.

Internationale und nationale Normung ISO 1000, DIN 1301 sowie EWG-Richtlinie 80/181 und 89/617 (EG-Mitgliedsstaaten)

1.2.2 Basiseinheiten (Grundeinheiten) des SI

Das SI-Einheitensystem baut auf 7 Basiseinheiten auch Grundeinheiten genannt auf:

Einheit der Länge	das Meter	(m)
Einheit der Zeit	die Sekunde	(s)
Einheit der Masse	das Kilogramm	(kg)
Einheit der elektr. Stromstärke	das Ampere	(A)
Einheit der Temperatur	das Kelvin	(K)
Einheit der Stoffmenge	das Mol	(mol)
Einheit der Lichtstärke	die Candela	(cd)

1.2.3 Definitionen der Basiseinheiten

1 Meter ist das 1650763,73 fache der Wellenlänge der von Atomen des Nuklids ^{86}Kr beim Übergang in den Zustand $5d_5$ zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten sich im Vakuum ausbreitenden Strahlung. *D.h. die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299792458 Sekunden durchläuft (1960)*

1 Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (1889).

Urkilogramm, Bez. für das Normal der Masseneinheit Kilogramm, das in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird: Ein Zylinder aus Platin-Iridium von etwa 39▪ mm Durchmesser und 39mm Höhe.

1 Sekunde ist das 9192631770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids 133Cs entsprechenden Strahlung (1967)

1 Ampere nach A.▪ M. Ampère, Einheit der elektr. Stromstärke, Einheitenzeichen A; die Stärke eines konstanten elektr. Stromes, der durch zwei parallele, geradlinige, unendl. lange und im

Vakuum im Abstand von 1· Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zw. diesen Leitern je· 1· Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N (1N=1 kgm/s^2) hervorrufen würde (1948).

1 Kelvin Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Trippelpunktes des Wassers (1967).

1 Candela ist die Lichtstärke, mit der (1/600000)m^2 der Oberfläche eines Schwarzen Strahlers bei der temperatur des beim Druck 101325 N/m^2 erstarrenden Platins senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet (1967).

1 Mol Mol [gekürzt aus Molekulargewicht], Einheitenzeichen mol; diejenige Stoffmenge einer Substanz, die aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoff-nuklids ^{12}C enthalten sind (das sind $6{,}022045 \cdot 10^{23}$ Atome; Avogadro-Konstante) (1971)

Nuklid Atomekerne eines Elementes können eine unterschiedliche Anzahl von Neutronen besitzen. Man bezeichnet sie als Isotope Nuklide oder kurz als Isotope dieses Elementes.

Schwarzer Strahler (schwarzer Körper, Planckscher Strahler), ein idealer Temperaturstrahler, der auftreffende elektromagnet. Strahlung aller Wellenlängen vollständig absorbiert und selbst Strahlung (die *schwarze Strahlung*) entsprechend seiner absoluten Temperatur gemäß den Strahlungsgesetzen abstrahlt.

1.2.4 Abgeleitete SI-Einheiten

Werden SI-Einheiten als Potenzprodukt aus den Basiseinheiten ohne Verwendung von Zahlenfaktoren abgeleitet, so spricht man von

„kohärenten" Einheiten

Alle Einheiten die nicht wie vorher beschrieben abgeleitet werden können, bezeichnet man als

„inkohärente" Einheiten

Diese Einheiten sind nicht Bestandteil des SI-Einheitensystems.

Beispiel: Das Watt ist eine kohärente Leistungseinheit, da es sich wie folgt ableiten läßt:

$$1W = 1kg \times m^2 / s^3$$

Das Watt kann also ohne Zahlenfaktor abgeleitet werden!

Das Kilowatt (kW) ist eine inkohärente Leistungseinheit, das es mit Hilfe eines Zahlenfaktors abgeleitet wird.

$$1kW = 10^3 kg \times m^2 / s^3$$

1.2.5 Dezimale Vielfache und Teile von SI-Einheiten

Um bei den SI-Einheiten unter Umständen recht umständliche Zahlenwerte zu vermeiden, dürfen durch dezimale Vorsätze neue vergrößerte oder verkleinerte Einheiten gebildet werden. Die gebildeten Einheiten sind dann allerdings nicht mehr kohärent.

Die folgende Tabelle zeigt die genormten Vorsätze zur Bezeichnung von dezimalen Vielfachen und Teilen von Einheiten:

Vorsatz	Zeichen	Zahlenwert
Exa-	E	10^{18}
Peta-	P	10^{15}
Tera-	T	10^{12}
Giga-	G	10^{9}
Mega-	M	10^{6}
Kilo-	k	10^{3}
Hekto-	h	10^{2}
Deka-	da	10

Vorsatz	Zeichen	Zahlenwert
Dezi-	d	10^{-1}
Zenti-	c	10^{-2}
Milli-	m	10^{-3}
Mikro-	µ	10^{-6}
Nano-	n	10^{-9}
Piko-	p	10^{-12}
Femto-	f	10^{-15}
Atto-	a	10^{-18}

1.2.6 SI-fremde Einheiten

Sie sind inkohärent abgeleitet und wegen ihrer Bedeutung in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft für dauernd oder zeitlich begrenzt zugelassen (beispielsweise Torr, Curie, PS). Einige von ihnen sind nur in Spezialgebieten zulässig.

1.2.7 Gesetzliche Einheiten

Mit dem „Gesetz über Einheiten im Messwesen“ vom 2.7.1969 in der Fassung des Gesetzes zur Änderung des Gesetzes über Einheiten im Messwesen vom 6.7.1973 und der „Ausführungsverordnung“ zu diesem Gesetz vom 26.6.1970 wurde festgelegt, dass in Deutschland gesetzliche Einheiten sind (das Gesetz verweist auf DIN 1301):

» die Basiseinheiten des SI
» die abgeleiteten SI-Einheiten
» die dezimalen Vielfachen und Teile von SI-Einheiten
» bestimmte SI-fremde Einheiten, z.T. mit eingeschränktem Anwendungsbereich Für eine Reihe von Einheiten wurde die Gültigkeit befristet.

1.2.8 Einheiten der wichtigsten physikalischen Größenarten

Größe	Formelzeichen	Einheit, Kurzzeichen, Beziehung	Bemerkung	VT
Oberflächenspannung	σ	$N/m = kg/s^2$ $dyn/cm = 10^{-3}\ N/m$	SI 77	/ /
Viskosität, dynamische	η	Pascalsekunde, $Pa \cdot s = N \cdot s/m^2 = kg/m \cdot s$ Poise, $P = 0{,}1\ Pa \cdot s$ Zentipoise, $cP = 10^{-3}\ Pa \cdot s$	SI 77 77	+ + –
Viskosität, kinematische	ν	m^2/s Stokes, $St = 10^{-4}\ m^2/s$ Zentistokes, $cSt = 10^{-6}\ m^2/s$	SI 77 77	/ + –
Impuls	p	$N \cdot s = kg \cdot m/s$	SI	/
Drehimpuls	L	$N \cdot m \cdot s = kg \cdot m^2/s$	SI	/
Massenträgheitsmoment	J	$kg \cdot m^2$	SI	/
Temperatur	T	Kelvin, K	BE	+
Celsius-Temperatur	t	Grad Celsius, °C $t = T - T_0;\ T_0 = 273{,}15\ K$	g	–
Temperaturdifferenz	ΔT Δt	Kelvin, K Grad Celsius, °C Grad, grd	BE g 74	+ – –
Wärmemenge	Q	$J = kg \cdot m^2/s^2$ $kcal = 4\,186{,}8\ J$	SI 77	+ –
Wärmekapazität Entropie	C S	$J/K = Ws/K = Nm/K = kg \cdot m^2/s^2 \cdot K$ $kcal/K = 4\,186{,}8\ J/K$	SI 77	/ /
Wärmekapazität, spezifische	c	$J/kg \cdot K = m^2/s^2 \cdot K$ $kcal/kg \cdot K = 4\,186{,}8\ J/kg \cdot K$	SI 77	/ /
Wärmeleitfähigkeit	λ	$W/m \cdot K = kg \cdot m/s^3 \cdot K$ $kcal/m \cdot h \cdot K = 1{,}163\ W/m \cdot K$ $cal/cm \cdot s \cdot K = 4{,}1868 \cdot 10^2\ W/m \cdot K$	SI 77 77	/ / /
Wärmeübergangskoeffizient Wärmedurchgangskoeffizient	α k	$W/m^2 \cdot K = kg/s^3 \cdot K$ $kcal/m^2 \cdot h \cdot K = 1{,}163\ W/m^2 \cdot K$ $cal/cm^2 \cdot s \cdot K = 4{,}1868 \cdot 10^4\ W/m^2 \cdot K$	SI 77 77	/ / /
Heizwert Wärmemenge, spezifische	H q, r	$J/kg = m^2/s^2$ $kcal/kg = 4\,186{,}8\ J/kg$	SI 77	/ –
Stromstärke, elektrische	I	Ampere, A	BE	+
Elektrizitätsmenge, Ladung	Q	Coulomb, $C = A \cdot s$	SI	+
Stromdichte, elektrische	S	A/m^2	SI	/
Flächenladungsdichte Verschiebungsdichte	σ D	$C/m^2 = A \cdot s/m^2$	SI	/
Spannung, elektrische	U	Volt, $V = W/A = kg \cdot m^2/s^3 \cdot A$	SI	+
Widerstand, elektrischer	R	Ohm, $\Omega = V/A = kg \cdot m^2/s^3 \cdot A^2$	SI	+
Leitwert, elektrischer	G	Siemens, $S = 1/\Omega = A/V = s^3 \cdot A^2/kg \cdot m^2$	SI	+

1.3 Fehlerbetrachtung/-berechnung

1.3.1 Die Vorbereitung

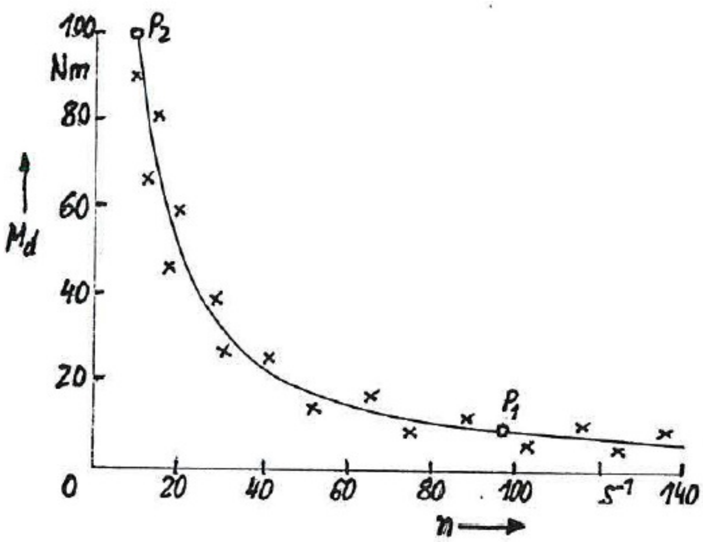
Die sorgfältige Auswertung einer Messung ist ebenso wichtig wie die Durchführung der Messung selbst. Im Wesentlichen sind dabei vier Probleme zu lösen:

1. Mit welcher Abbildungskonstante K_{Ab} ist die an der Skale des Messgeräts abgelesene Abbildungsgröße zu multiplizieren, damit man den Messwert *M* erhält?
2. Wie bekommt man aus dem Flächeninhalt *A* eines Schreibdiagramms unter Berücksichtigung der Zeichenmaßstäbe den gesuchten Messwert *M?*
3. Wie kann man aus dem grafischen Verlauf der Messgröße *M* eine mathematische Beziehung gewinnen?
4. Wie groß ist der Fehler des Messergebnisses, und wie gehen die Fehler der einzelnen Messgrößen darin ein?

Der einfachste Fall einer Auswertung liegt vor, wenn die Messgröße direkt gemessen wird, wobei die Skale des Geräts in Einheiten der Messgröße kalibriert ist. Komplizierter wird die Auswertung, wenn das Messgerät einen. umschaltbaren Messbereich aufweist. Die Skale ist dann meist mit einer Zahlenteilung versehen. Mit Hilfe der Skalenkonstanten K_{sk} muss der Wert jeder Messgröße berechnet werden. Vielfach liegt eine indirekte Messung vor. Es finden ein oder mehrere Messwandler Verwendung, die die Messgröße in eine Abbildungsgröße umwandeln.

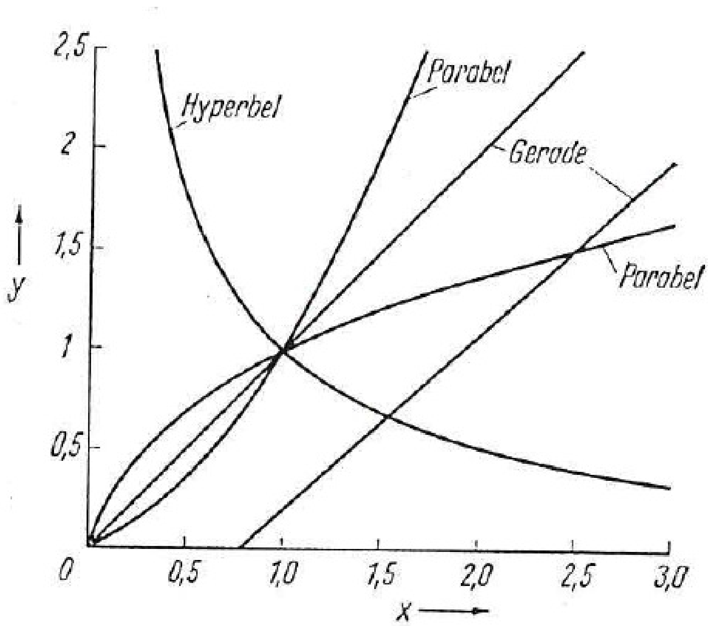
1.3.2 Mathematische Darstellung von Messergebnissen

Um das Messergebnis diskutieren zu können, muss es grafisch dargestellt werden. Üblicherweise wird hierzu ein rechtwinkliges Koordinatensystem verwendet. Naturgemäß unterliegen die Messpunkte einer gewissen Streuung. Demzufolge ist eine direkte Verbindung der einzelnen Messpunkte wenig sinnvoll. Unter Umgehung der exakten Methoden der Ausgleichsrechnung wird folgendes vereinfachendes Verfahren vorgeschlagen:
Man zeichnet eine ausgleichende Kurve, so, dass etwa die gleiche Anzahl der Messpunkte zu beiden Seiten der Kurve liegt. „Ausreißer" scheiden aus.



Wird z.B. ein Motor auf dem Prüfstand bei konstanter Leistung durch unterschiedliche Momente belastet, ergibt sich der dargestellte Verlauf Md=*f(n).* Bevor mit der numerischen Auswertung begonnen werden kann, ist der Gleichungstyp zu wählen. Als Hilfe soll die Zusammenstellung im folgenden Bild dienen. Es gelten für die Gerade, die Parabel und die Hyperbel folgende Beziehungen: ·

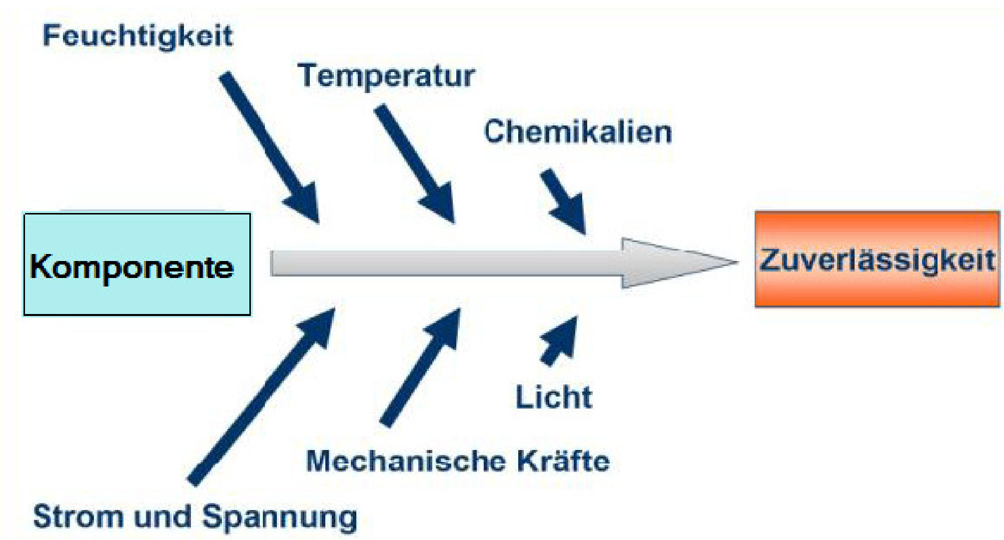
$y = mx + b$	*Gerade*
$y = a + bx^2 + cx^3$	*Parabel*
$y = a + b/x.$	*Hyperbel*



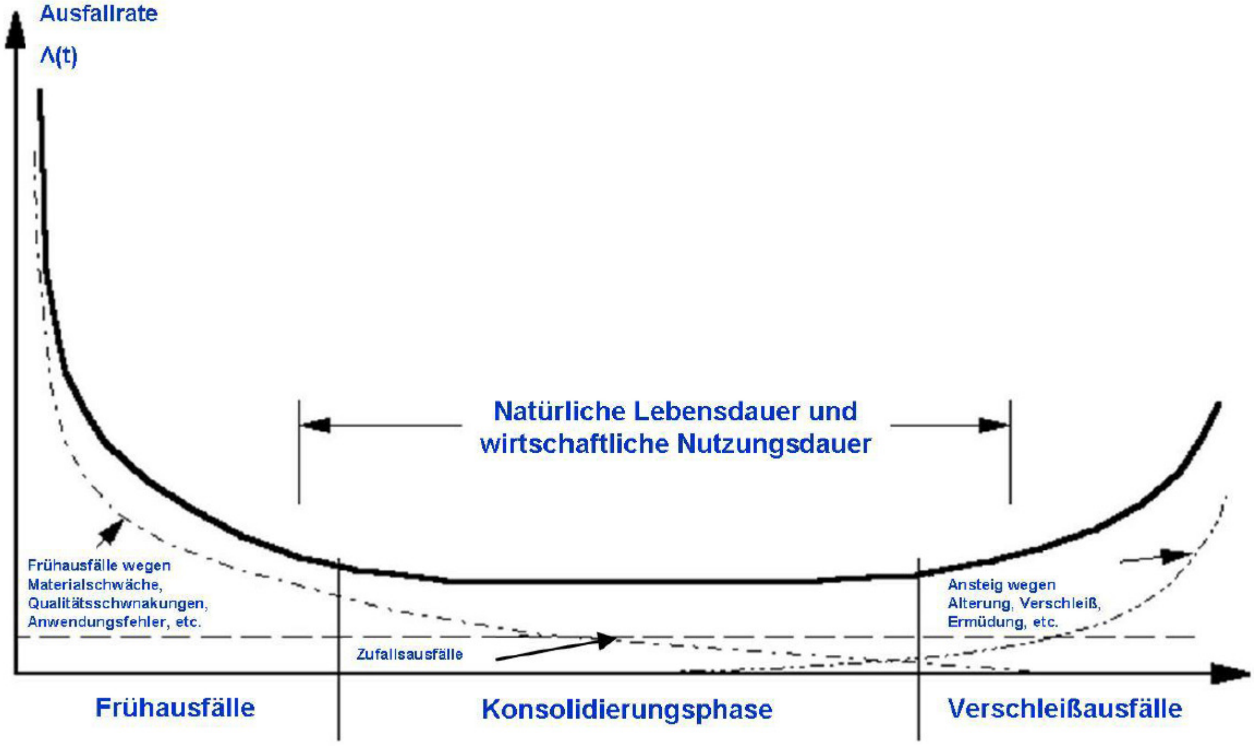
1.3.3 Ausfallwahrscheinlichkeit

Die intrinsische Zuverlässigkeitsphase beschreibt die sogenannte Verschleißphase der Bauteile am Ende des Produktzyklus. Ihr zugrunde liegen ein zunehmender Materialverschleiß und Alterung.

Diese kontinuierliche Veränderung über die Zeit ist im Allgemeinen messbar und wird als Degradation bezeichnet. Wichtigster Degradationsparameter z.B. für LED´s ist die Änderung der Helligkeit.
Während des Betriebes kommt es bei LED´s zu einer allmählichen Abnahme des Lichtstromes, gemessen in Lumen. Diese wird in der Regel durch Betriebsstrom und Betriebstemperatur der LED beschleunigt und tritt auch auf, wenn die LED innerhalb der Spezifikation betrieben wird.



1.3.3.1 Die Badewannenkurve, der zeitliche Verlauf der Ausfälle



Phase I der Frühausfälle
Zu Beginn der Produktlebensdauer kann eine höhere, mit der Zeit rasch abnehmende Ausfallrate beobachtet werden. Diese wird in der Regel durch Konstruktionsmängel, durch Materialschwächen, durch Qualitätsschwankungen in der Fertigung oder durch Anwendungsfehler (Dimensionierung, Handhabung, Prüfung, Bedienung usw.) oder unechte, nicht bestätigte Ausfälle verursacht.

Phase II mit konstanter Ausfallrate
Diese Phase entspricht der eigentlichen wirtschaftlichen Nutzungszeit, die Frühfehler sind abgeklungen und die Abnutzungserscheinungen sind noch vernachlässigbar. In dieser Phase ist die Ausfallrate konstant. Ausfälle treten hier meistens plötzlich und rein zufällig auf.

Phase III der Verschleißausfälle

In dieser Phase steigt die Ausfallrate aufgrund von Alterung, Abnutzung, Ermüdung usw. mit andauerndem Betrieb immer schneller an.

1.3.3.2 Der Haupteinflussfaktor ist die Temperatur

1889 entdeckte der schwedische Chemiker Svante Arrhenius im Zuge seiner Forschungen über die Elektrolytische Dissoziation, wofür er 1903 den Chemie-Nobelpreis erhielt, den Zusammenhang zwischen chemischer Reaktions-geschwindigkeit und Temperatur. Dieser fundamentale Zusammenhang lässt sich durch die Arrhenius-Gleichung beschreiben

- Arrhenius-Gesetz (konst. Temperatur)

$$\boxed{BF = e^{\frac{-E_a}{k}\left(\frac{1}{T_{app}} - \frac{1}{T_{norm}}\right)}}$$

- Coffin-Manson-Gesetz (Temperaturwechsel)

$$\boxed{BF = e^{\frac{-E_a}{k}\left(\frac{1}{T_{app}} - \frac{1}{T_{norm}}\right)} \cdot \left(\frac{\Delta T_{app}}{\Delta T_{norm}}\right)^{n} \cdot \left(\frac{f_{app}}{f_{norm}}\right)^{m}}$$

- Hallberg-Peck-Gesetz (Feuchte)

$$\boxed{BF = e^{\frac{-E_a}{k}\left(\frac{1}{T_{app}} - \frac{1}{T_{norm}}\right)} \cdot \left(\frac{RH_{app}}{RH_{norm}}\right)^{p}}$$

Legende:

BF = Beschleunigungsfaktor
E_a = Aktivierungs – Energie (0,1 eV ... 2 eV)
Arrhenius: oft 0,4 eV; Coffin-Manson: ≈ 1,2 eV; Hallberg-Peck: ≈ 0,9 eV
k = Boltzmann Konstante ($1{,}380658 \cdot 10^{-23}$ J/K)
T_{app} = Einsatz - Temperatur
T_{norm} = Referenztemperatur für gegebene Ausfallrate
RH_{app} = Relative Feuchte (engl. Humidity) beim Einsatz
RH_{norm} = Relative Feuchte für gegebene Ausfallrate
m = Faktor (lt. Literatur meist ≈ 2, je nach Fehlermechanismus 1,5 ... 3)
n = Faktor (lt. Literatur ≈ 0,33)
ΔT_{app} = Temperaturänderung beim Einsatz
ΔT_{norm} = Temperaturänderung für gegebene Ausfallrate
f_{app} = Frequenz der Temperaturänderung beim Einsatz
f_{norm} = Frequenz der Temperaturänderung für gegebene Ausfallrate
p = Faktor (lt. Literatur 1 ... 8, meist n ≈ 3)

Der genaue zeitliche Verlauf der Ausfallrate hängt entscheidend von den Einsatzbedingungen ab wie z.B.:

- der Umgebungstemperatur (Sperrschichttemperatur)
- der Feuchte
- dem mechanischer Schock
- der Vibration
- der ionisierende Strahlung
- dem Temperaturwechsel
- den Schaltzyklen
- etc.

Der Einfluss der Umgebungstemperatur auf die Ausfallrate wird u.A. beschrieben durch das

- Arrhenius-Gesetz (konstant höhere Temperatur)
- Coffin-Manson-Gesetz (Temperaturwechsel)
- Hallberg-Peck-Gesetz (Feuchte)

Faustregel (Arrhenius):

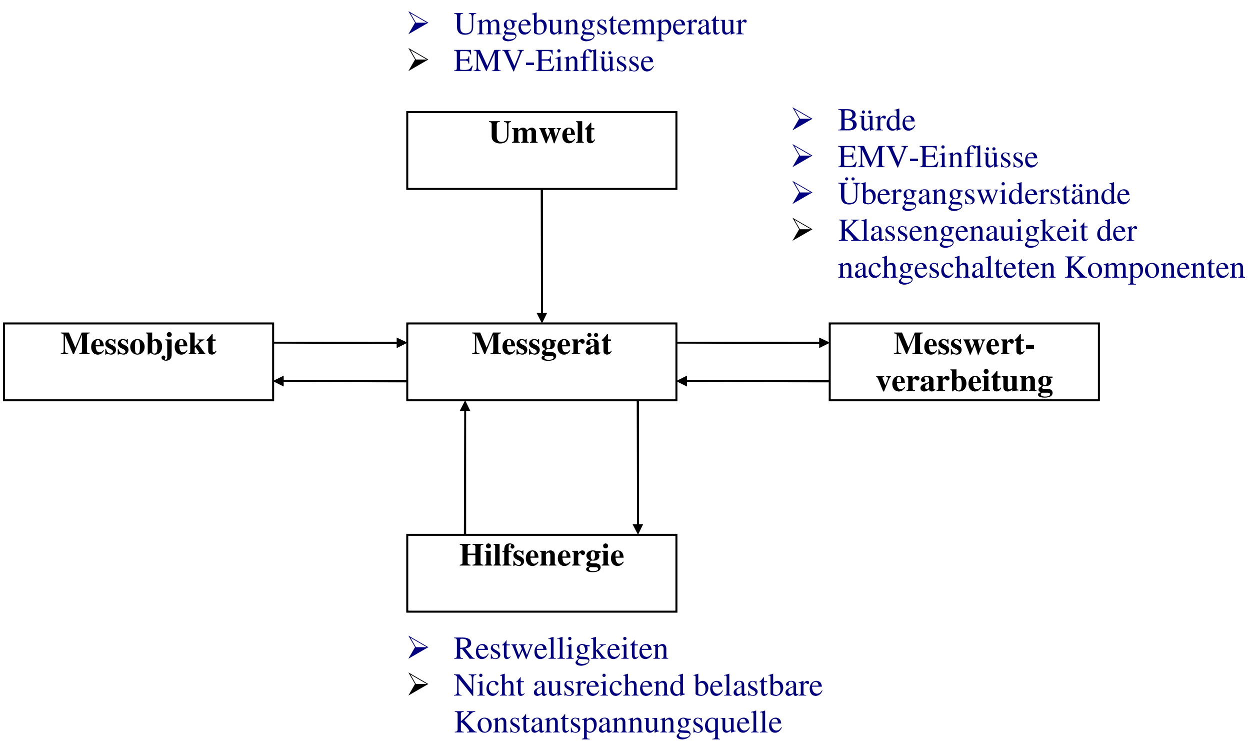
Pro 10 Kelvin Temperaturerhöhung → verdoppelt sich die Ausfallrate!

Dies trifft besonders auf die verwendeten Halbleiter (Sperrschichttemperatur) und Elektrolytkondensatoren (Elkos) zu. Bei den Bad Boys im System, führt die Temperaturerhöhung zu einem zunehmenden Austrocknen des Dielektrikums und damit zur Reduktion der Durchschlagsfestigkeit, in Verbindung mit der angelegten Spannung.

1.3.4 Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messgerät

Eine Messung ist immer mit einem Energie- bzw. Informationsfluss vom Messobjekt zum Messgerät verbunden.
Damit eine Messung auch als exakt und fehlerfrei gelten kann, muss bei jeder Messanordnung darauf geachtet werden, dass das Messgerät durch seinen Einbau das Messergebnis nicht verfälschen kann.
Eine Rückwirkung vom Messgerät auf das Messobjekt ist unbedingt zu vermeiden. Die Praxis zeigt aber, dass sich eine Rückwirkung nie ganz vermeiden lässt.

Die folgende Grafik zeigt möglich Verursacher von Rückwirkungen auf das Messergebnis.



Die sorgfältige Auswertung einer Messung ist ebenso wichtig, wie die Durchführung der Messung selbst!

1.3.5 Definition der Fehler

Auch bei einer rückwirkungsfreien und bestimmungsgemäßen Anwendung der Messgeräte ist das Ergebnis nicht völlig richtig.
Der jeweilige Unterschied zwischen dem gemessenen, angezeigten Wert x und dem wahren wert x_w der Messgröße wird als Fehler Δx bezeichnet:

$$\Delta x = x - x_w \qquad \Delta x = A - W$$

Es gibt zwei Kategorien von Fehlern. Dies sind zum Einen die

systematischen Fehler und die
zufälligen Fehler

Systematische Fehler erscheinen bei jeder Wiederholung des Messvorganges mit gleichem Wert und gleichem Vorzeichen. Sie lassen sich korrigieren. Umwelteinflüsse können ggf. durch Abschirmung, Temperieren der Mess-anordung beseitigt werden. Man spricht im Zusammenhang mit systematischen Fehlern von **Messunrichtigkeit.**

Als Beispiel für systematische Fehler sei hier genannt:

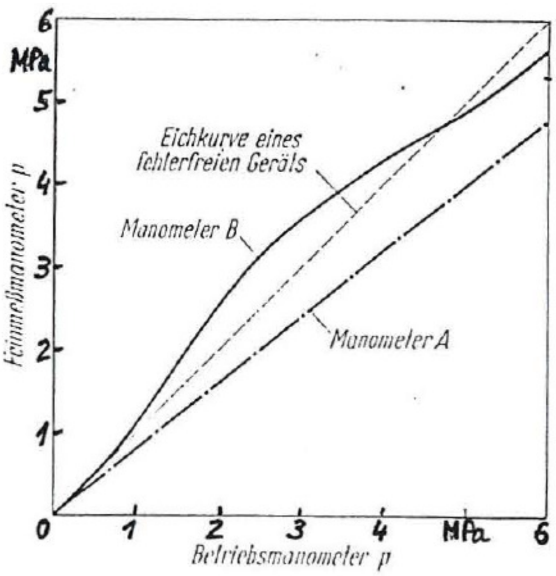
Gerätefehler
Fehler der Meßmethode
Eichfehler/ Justierfehler
Umwelteinflüsse

Zufällige Fehler wechseln nach Betrag und Vorzeichen. Umwelteinflüsse können stark schwanken und sind dann nicht mehr erfassbar. Da die Messwerte also streuen, spricht man auch von **Messunsicherheit**.

Als Beispiel für zufällige Fehler sei hier genannt: **Ablesefehler: Parallaxe**
Irrtümer
Umwelteinflüsse

1.3.6 Systematische Fehler

Der systematische Fehler ist naturgemäß gleichbleibend. Er hat ein bestimmtes Vorzeichen + oder -. Messgeräte und Messeinrichtungen, die einen systematischen Fehler zeigen, sind durchaus brauchbar. Sie müssen nur mit systemfehlerfreien Messgeräten verglichen, also justiert / „geeicht" werden. Mit Hilfe der Berichtigung kann der Richtigwert ermittelt werden. Die Darstellung des Prüfergebnisses erfolgt in einem Eichschaubild.



Druckpresse zur Manometerkalibrierung

Für den Betriebsgebrauch wird meist das daraus gewonnene Fehlerdiagramm verwendet.

Systematische Fehler werden durch die Unvollkommenheit der Messverfahren, des Messgegenstands, der Messgeräte, der Maßverkörperungen und der erfassbaren Umwelteinflüsse sowie der persönlichen Einflüsse des Beobachters hervorgerufen. Systematische Fehler können z.B. auftreten, wenn bei der Temperaturmessung mit einem Thermoelement die vorhandene Vergleichsstellentemperatur von dem vorgeschriebenen Wert abweicht. Die Differenz kann mit Hilfe eines Glasthermometers genau erfasst und die am Gerät angezeigte Temperatur daraufhin berichtigt werden. Ein weiterer leicht erkennbarer systematischer Fehler liegt vor, wenn der Zeiger eines Messgeräts im unangeschlossenen Zustand nicht auf Null einspielt. Durch Drehen der Nulleinstellung des analogen Messgerätes lässt sich die Zeigerstellung korrigieren. Dies sollte vor Beginn einer jeden Widerstandsmessung mit einem analogen Messgerät durchgeführt werden (Messklemmen kurzschließen und Nullabgleich!)

Die Erfassung systematischer Fehler ist u. U. mit großem Aufwand verbunden, der sich für praktische Messungen nicht vertreten lässt. Unter diesen Umständen bezeichnet man den Fehler als nicht erfassbar. Trotzdem ist eine Fehlereinschätzung hinsichtlich der Größe und des Vorzeichens zweckmäßig und auch möglich.

Es gibt zwei Arten von systematischen Fehlern die in der Herstellerangabe „Garantiefehlergrenze“ bereits enthalten sind:

Absoluter Fehler und

Relativer Fehler

Der absolute Fehler wird wie folgt definiert:

Abs. Fehler = Istwert - Sollwert d.h.

$\Delta x = x - x_w$ $\Delta x = A - W$

Der absolute Fehler Δx wird unter der Verwendung der Einheit vom Hersteller angegeben. Dieser Wert ist **dimensionsbehaftet.**

Der relative Fehler wird wie folgt definiert:

$$f_{\%} = 100\% \cdot (\text{Istwert} - \text{Sollwert}) \, / \, \text{Sollwert} \qquad \text{d.h.}$$

$$f_{\%} = 100\% \cdot (x - x_w) \, / \, x_w \qquad = 100\% \cdot \Delta x \, / \, x_w$$

Dieser Wert wird in **%** angegeben.

Beispiel:

Gegeben: $x = 10{,}23V$
$x_w = 9{,}98V$

Gesucht: Absoluter Fehler ?
Relativer Fehler ?

$$\Delta x = 10{,}23V - 9{,}98V = \underline{\underline{0{,}25V}}$$

$$f_{\%} = 100\% \cdot (10{,}23V - 9{,}98V) \, / \, 9{,}98V = \underline{\underline{2{,}50\%}}$$

1.3.7 Garantiefehlergrenze / Klassengenauigkeit

Die gebräuchlichste Herstellerangabe für die Definition der Messgenauigkeit ist die. Garantiefehlergrenze. Bei dieser Angabe gibt der Hersteller relativen Fehler seines Messgerätes aber bezogen auf den Messbereichsendwert an. Diese Fehlerangabe wird wie folgt definiert:

$$f_{\%\ KG} = 100\% \times (\text{Istwert} - \text{Sollwert}) \ / \ \text{Messbereichsendwert}$$

Die Einflussgrößen die auftreten können und die in der Angabe der Garantiefehlergrenze (Klassengenauigkeit) berücksichtigt werden müssen sind genormt.
Betriebslage, Temperatur, Frequenz des Messsignals, Hilfsspannung, Fremdfeld sind einige Einflussgrößen.

Die Grundlage für die Berücksichtigung der Einflussgrößen in der Angabe der Garantiefehlergrenze bzw. Klassengenauigkeit, bildet die DIN 43780.
Die Klassengenauigkeit von Messgeräten wird in der Praxis wie folgt unterteilt:

	Feinmeßgeräte			**Betriebsmeßgeräte**			
Elektrische Messgeräte	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2,5	5
Messwandler	0,1	0,2	0,5	1		3,0	
Druckmess-geräte		0,3	0,6	1	1,6	2,5	4

Die Angaben in der Tabelle sind %-Angaben.

Ein Beispiel:

Gegeben: Messbereichsendwert = 75V,
Klassengenauigkeit = ∓ 1,5%

Für einen Messbereich von 75V folgt: $F_{KG} = \mp 1{,}5\% * 75V / 100\% = \mp 1{,}125V$

a) Beträgt der Messwert nun 10V, liegt der wahre Wert zwischen **10V ∓1,125V**

$$10V - 1{,}125V = 8{,}875V \quad \text{bzw.} \quad 10V + 1{,}125V = 11{,}125V$$

Bezogen auf den Messwert kann man festhalten, dass es zu einer Abweichung von

$$f_{\%} = \mp 1{,}125V * 100\% / 10V = \mp 11{,}25\%$$

b) Beträgt der Messwert nun 50V folgt: **50V ∓1,125V**

$$50V - 1{,}125V = 48{,}875V \quad \text{bzw.} \quad 50V + 1{,}125V = 51{,}125V$$

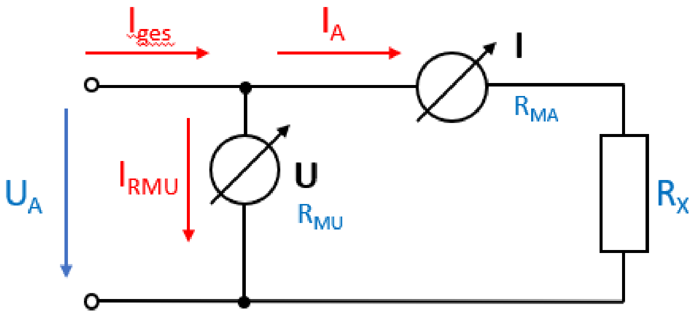
Bezogen auf den Messwert kann man festhalten, dass es zu einer Abweichung von

$$f_{\%} = \mp 1{,}125V * 100\% / 50V = \mp 2{,}25\%$$

Fazit: **Je näher der zu messende Messwert am Messbereichsendwert liegt, um so kleiner wird der absolute bzw. relative Fehler!**

Das ist u.A. die Erklärung für die Aussage, dass man bei analogen Messgeräten immer im letzten Skalendrittel liegen soll!

Ein weiteres Beispiel: Präzisionsmessung von Widerständen



Anzeige	Messbereich	Klasse	R_{MU}/ R_{MA}
U_A= 19V	30V	1,5	100kΩ
I_A= 8mA	10mA	1	60Ω

Anzeigewert: $\mathbf{R_{XA}} = \frac{U_A}{I_A}$ **= 2375 Ω**

Aber: der Innenwiderstand des Amperemeters muss berücksichtigt werden, d.h.

$$U_A = (R_{MA} + R_X)\, I_A\ ,$$

d.h. $\mathbf{R_X} = \frac{U_A}{I_A} - \mathbf{RMA}$ (Korrektur des systematischen Fehlers)

Die Fehlerangaben für $\mathbf{R_X}$ ergeben sich aus den Messfehlern für Spannung und Strom:

$$R_X = \frac{U_A \pm \Delta U}{I_A \pm \Delta I} - R_{MA}$$

Wegen der Klassengenauigkeit gilt für die Anzeigewerte: ΔU = 0,45V und
ΔI = 0,1 mA

Maximaler Wert für R_X: $$R_{X,max} = \frac{U_A + 0{,}45V}{I_A - 0{,}1mA} - 60\Omega = 2{,}4\ k\Omega$$

Minimaler Wert für R_X: $$R_{X,min} = \frac{U_A - 0{,}45V}{I_A + 0{,}1mA} - 60\Omega = 2{,}23\ k\Omega$$

Somit folgt für den „**Unsicherheitsbereich**“: **Absolute Unsicherheit ΔR_X : [2, 23 $k\Omega$, 2, 4 $k\Omega$]**

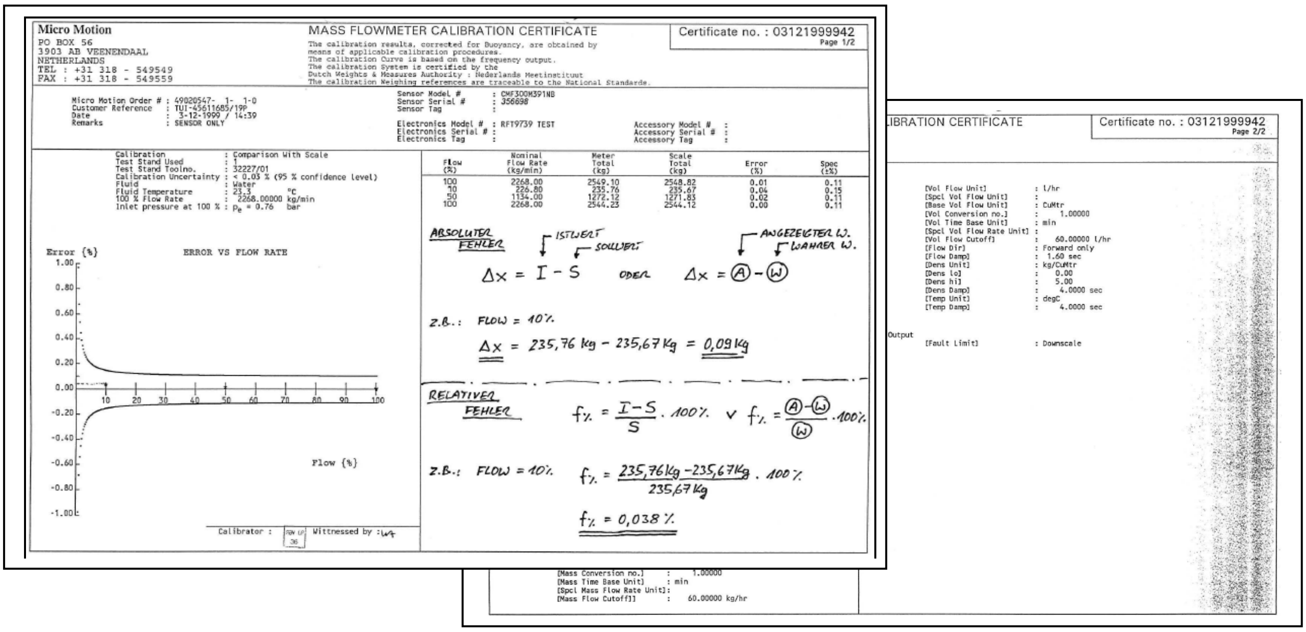
Für die **relative Unsicherheit** folgt:

Maximaler relativer Fehler für R_X: $F_{R,max} = \frac{R_{XA} - R_{X,min}}{R_{X,min}} = \frac{2375\Omega - 2230\Omega}{2230\Omega} = 0{,}065 \triangleq 6{,}5\%$

Minimaler relativer Fehler für R_X: $F_{R,min} = \frac{R_{XA} - R_{X,max}}{R_{X,max}} = \frac{2375\Omega - 2400\Omega}{2400\Omega} = -0{,}0104 \triangleq -1{,}04\%$

Somit folgt für den „**Unsicherheitsbereich**": **Relative Unsicherheit ΔF_R : $[-1,04\%, 6,5\%]$**

Kalibrierzertifikat eines Massedurchflussmessers (MDM)



Micro Motion
PO BOX 56
3903 AB VEENENDAAL
NETHERLANDS
TEL : +31 318 - 549549
FAX : +31 318 - 549559

MASS FLOWMETER CALIBRATION CERTIFICATE

The calibration results, corrected for Buoyancy, are obtained by means of applicable calibration procedures.
The calibration Curve is based on the frequency output.
The calibration System is certified by the Dutch Weights & Measures Authority : Nederlands Meetinstituut
The calibration Weighing references are traceable to the National Standards.

Certificate no. : 03121999942
Page 1/2

Micro Motion Order # : 49020547- 1- 1-0
Customer Reference : TUI-45611685/19P
Date : 3-12-1999 / 14:39
Remarks : SENSOR ONLY

Sensor Model # : CMF300M391NB
Sensor Serial # : 356698
Sensor Tag :

Electronics Model # : RFT9739 TEST
Electronics Serial # :
Electronics Tag :

Accessory Model # :
Accessory Serial # :
Accessory Tag :

Calibration : Comparison With Scale
Test Stand Used : 1
Test Stand Toolno. : 32227/01
Calibration Uncertainty : < 0.03 % (95 % confidence level)
Fluid : Water
Fluid Temperature : 23.3 °C
100 % Flow Rate : 2268.00000 kg/min
Inlet pressure at 100 % : p_e = 0.76 bar

Flow (%)	Nominal Flow Rate (kg/min)	Meter Total (kg)	Scale Total (kg)	Error (%)	Spec (±%)
100	2268.00	2549.10	2548.82	0.01	0.11
10	226.80	235.76	235.67	0.04	0.15
50	1134.00	1272.12	1271.83	0.02	0.11
100	2268.00	2544.23	2544.12	0.00	0.11

ABSOLUTER FEHLER

ISTWERT, SOLLWERT; ANGEZEIGTER W., WAHRER W.

$\Delta x = I - S$ ODER $\Delta x = A - W$

Z.B.: FLOW = 10%

$\Delta x = 235{,}76\ kg - 235{,}67\ kg = \underline{\underline{0{,}09\ kg}}$

RELATIVER FEHLER

$f_\% = \frac{I-S}{S} \cdot 100\% \quad \vee \quad f_\% = \frac{A-W}{W} \cdot 100\%$

Z.B.: FLOW = 10%

$f_\% = \frac{235{,}76\ kg - 235{,}67\ kg}{235{,}67\ kg} \cdot 100\%$

$\underline{\underline{f_\% = 0{,}038\%}}$

Error (%) — ERROR VS FLOW RATE — Flow (%)

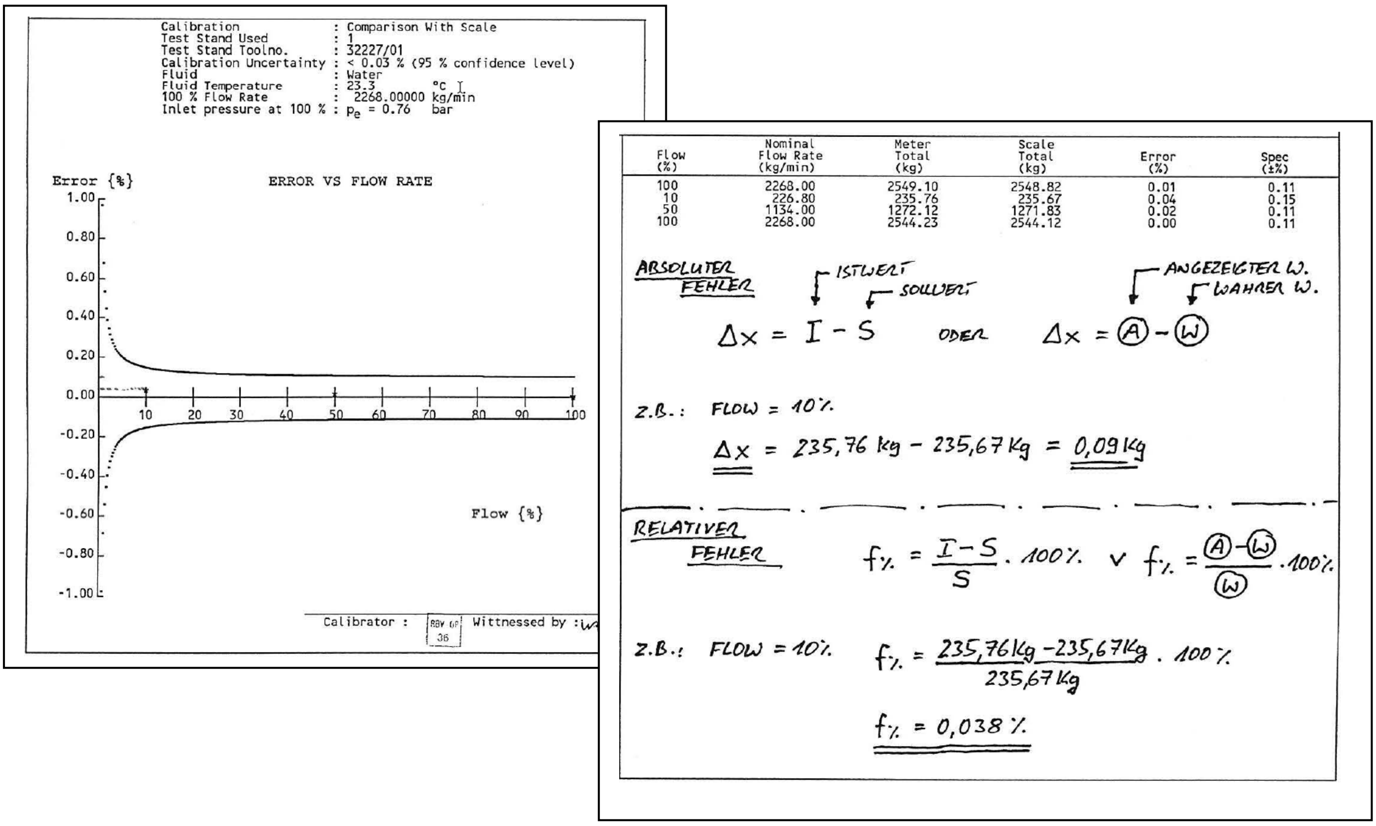
Calibrator : RBV 36 Witnessed by :

MASS FLOWMETER CALIBRATION CERTIFICATE — Certificate no. : 03121999942, Page 2/2

[Vol Flow Unit] : l/hr
[Spcl Vol Flow Unit] :
[Base Vol Flow Unit] : CuMtr
[Vol Conversion no.] : 1.00000
[Vol Time Base Unit] : min
[Spcl Vol Flow Rate Unit] :
[Vol Flow Cutoff] : 60.00000 l/hr
[Flow Dir] : Forward only
[Flow Damp] : 1.60 sec
[Dens Unit] : kg/CuMtr
[Dens lo] : 0.00
[Dens hi] : 5.00
[Dens Damp] : 4.0000 sec
[Temp Unit] : degC
[Temp Damp] : 4.0000 sec

Output
[Fault Limit] : Downscale

[Mass Conversion no.] : 1.00000
[Mass Time Base Unit] : min
[Spcl Mass Flow Rate Unit] :
[Mass Flow Cutoff] : 60.00000 kg/hr



1.3.8 Gerätekennzeichnungen

Neben der Angabe der Klassengenauigkeit findet man bei Analoginstrumenten weitere Angabe auf der Messskala, die der Benutzer berücksichtigen muss damit er möglichst fehlerarme Messergebnisse erhält.

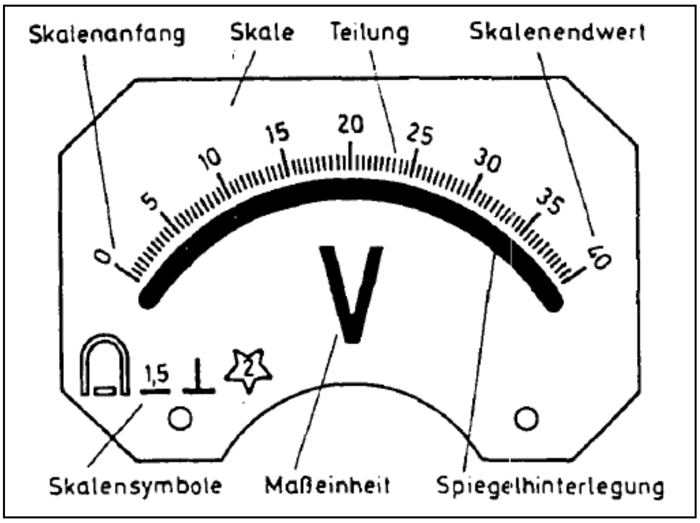
Bei analogen Messgeräten spielt die Betriebslage eine große Rolle für die Messgenauigkeit. Die Lage in der das Messgerät zu betreiben ist

⊥	senkrechte Betriebslage
⊓	waagerechte Betriebslage
∠60°	schräge Betriebslage

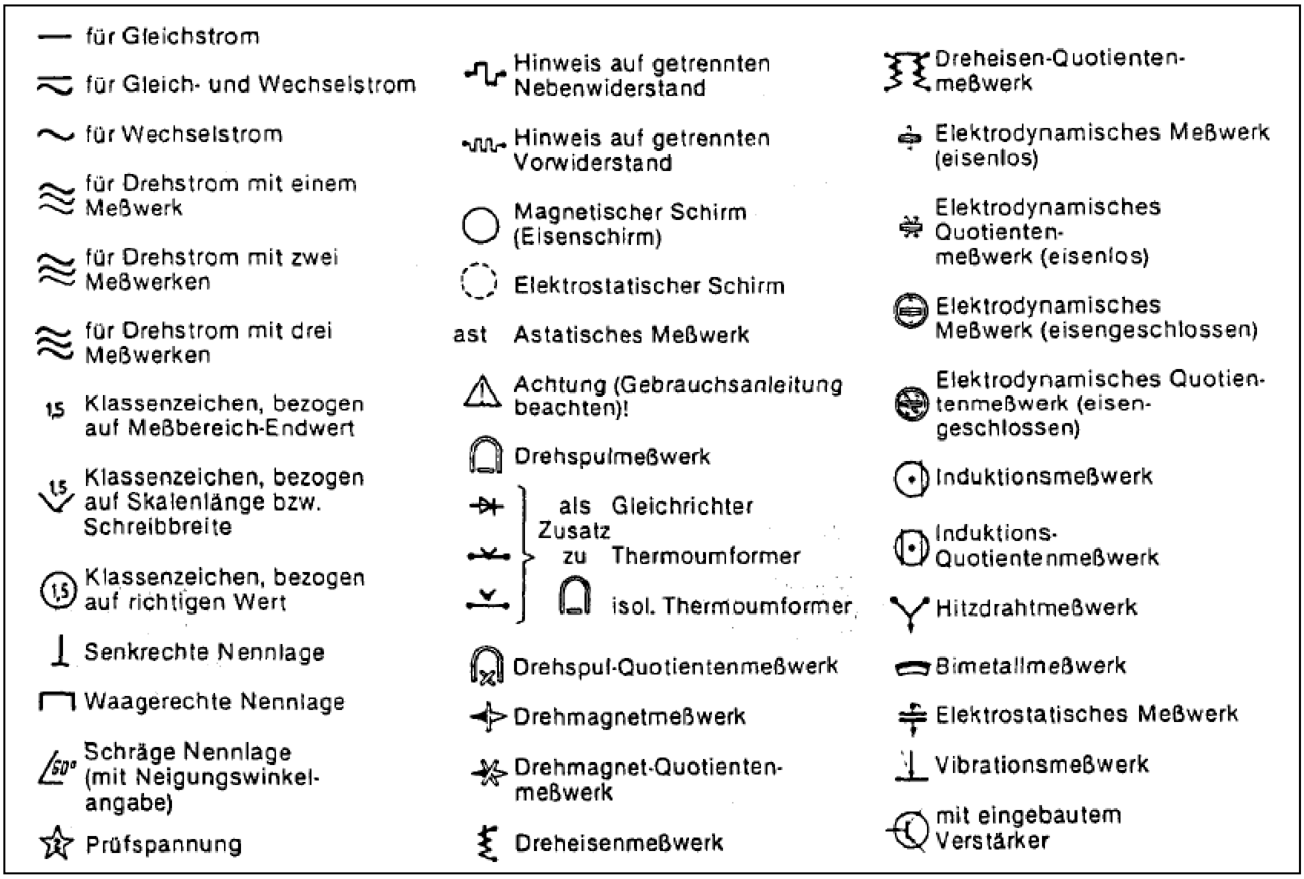
Beachtet man die Gebrauchslage nicht, so kann es zu größeren **Umkehrspannen** kommen. Die Umkehrspanne ist die Differenz zwischen den Messwerten bei ansteigendem Messwert und fallendem Messwert. Es ergibt sich in einem Diagramm eine Hysteresekurve, wenn y = Zeigerauschlag ist und x = Messstrom I_M.

Weitere Symbole sind:

Skala eines Analogmessgerätes



Skalensinnbilder gemäß DIN 43802:


für Gleichstrom
für Gleich- und Wechselstrom
für Wechselstrom
für Drehstrom mit einem Meßwerk
für Drehstrom mit zwei Meßwerken
für Drehstrom mit drei Meßwerken
1,5 Klassenzeichen, bezogen auf Meßbereich-Endwert
1,5 Klassenzeichen, bezogen auf Skalenlänge bzw. Schreibbreite
1,5 Klassenzeichen, bezogen auf richtigen Wert
Senkrechte Nennlage
Waagerechte Nennlage
60° Schräge Nennlage (mit Neigungswinkelangabe)
2 Prüfspannung
Hinweis auf getrennten Nebenwiderstand
Hinweis auf getrennten Vorwiderstand
Magnetischer Schirm (Eisenschirm)
Elektrostatischer Schirm
ast Astatisches Meßwerk
Achtung (Gebrauchsanleitung beachten)!
Drehspulmeßwerk
als Gleichrichter
Zusatz zu Thermoumformer
isol. Thermoumformer
Drehspul-Quotientenmeßwerk
Drehmagnetmeßwerk
Drehmagnet-Quotientenmeßwerk
Dreheisenmeßwerk
Dreheisen-Quotientenmeßwerk
Elektrodynamisches Meßwerk (eisenlos)
Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk (eisenlos)
Elektrodynamisches Meßwerk (eisengeschlossen)
Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk (eisengeschlossen)
Induktionsmeßwerk
Induktions-Quotientenmeßwerk
Hitzdrahtmeßwerk
Bimetallmeßwerk
Elektrostatisches Meßwerk
Vibrationsmeßwerk
mit eingebautem Verstärker

1.3.9 Schaltungsfehler

Aus der Praxis kann man feststellen, dass die häufigsten Fehler beim Aufbau einer elektrischen Messschaltung unter Verwendung eines elektrischen Messgerätes für die direkte Messung von Strom und Spannung folgende Fehler sind:

- Falscher Messbereich (gilt auch für Digitalmessgeräte)
- Messgerät mit schlechter Klassengenauigkeit
- Messgeräte mit schlecht dimensionierten Innen-widerständen

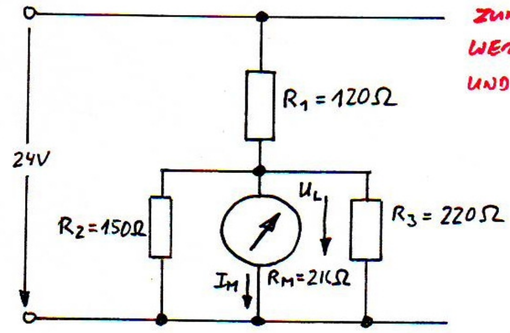
Bei analogen oder digitalen elektrischen Messinstrumenten ist die Größe des Innenwiderstandes besonders wichtig.

Die Messleistung ist möglichst klein zu halten !

Das heißt: $P_M = U^2 / R_M$ oder $P_M = I^2 \cdot R_M$

Der Innenwiderstand eines Spannungsmessgerätes sollte möglichst gegen unendlich streben, wohin der Innenwiderstand eines Strommessgerätes möglichst gegen Null streben sollte.

<u>Beispiel:</u>



ZUM THEMA WAHRER WERT, ANGEZEIGTER WERT UND FEHLER

1. BESTIMMUNG DES WAHREN WERTES (SOLLWERT) (W):

$$R_G = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 120\Omega + \frac{150\Omega \cdot 220\Omega}{150\Omega + 220\Omega} = 120\Omega + 89{,}19\Omega$$

$$R_G = 209{,}19\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{24V}{209{,}19\Omega} = 0{,}115A$$

$$U_L = I \cdot R_L' = 0{,}115A \cdot 89{,}19\Omega = \underline{\underline{10{,}23V}} = (W)$$

---

2. BESTIMMUNG DES ANGEZEIGTEN WERTES (ISTWERT) (A)

$$R_G = 120\Omega + \frac{1}{\frac{1}{150\Omega} + \frac{1}{2k\Omega} + \frac{1}{220\Omega}} = 120\Omega + 85{,}38\Omega$$

$$R_G = 205{,}38\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{24V}{205{,}38\Omega} = 0{,}1168A$$

$$U_L' = I \cdot R_L'' = 0{,}1168A \cdot 85{,}38\Omega = \underline{\underline{9{,}977V}} = (A)$$

WÄHLT MAN NUN EIN MESSGERÄT MIT EINEM MESSBEREICH VON 0-100V UND EINER KLASSENGENAUIGKEIT VON 2,5 SO ERGIBT SICH FOLGENDES BEISPIEL:

REL. FEHLER $= f_{\%} = 2{,}5\%$

$$\pm \Delta U = \pm \frac{2{,}5\%}{100\%} \cdot 100V$$

$$\pm \Delta U = 2{,}5V$$

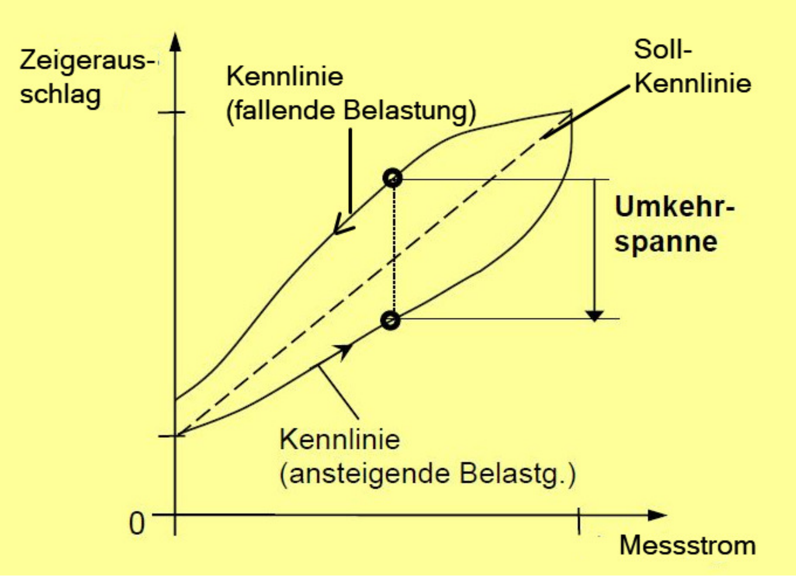
$$U_L' \pm \Delta U = 9{,}98V \pm 2{,}5V \Longrightarrow \left.\begin{matrix} U'_{L\,min} = 7{,}48V \\ U'_{L\,max} = 12{,}48V \end{matrix}\right\}$$

UNSICHERHEITSBEREICH: IN DIESEM BEREICH WIRD SICH DER ZEIGER EINSTELLEN

<u>FAZIT:</u> DER MESSBEREICH IST VIEL ZU GROSS UND DAMIT FALSCH GEWÄHLT!

1.3.10 Zufällige Fehler

Messtechnisch nicht erfassbare und beeinflussbare Änderungen verursachen einen zufälligen Fehler. Bei einer Wiederholung der Messung unter gleichen Bedingungen werden die einzelnen Messwerte immer voneinander abweichen. Man spricht von einer
Streuung der Messwerte oder von einer Messunsicherheit (im Gegensatz zur Messunrichtigkeit beim systematischen Fehler). Die Abweichung ist nicht in der Richtung erfassbar. Deshalb erhält der Fehler das Doppelvorzeichen +/-. Eine Aussage über die Größe ist nur dann möglich, wenn eine Anzahl Messungen (d.h. wenigstens 10) unter gleichen Bedingungen durchgeführt und den nach Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgewertet werden. Zufällige Fehler können ihre Ursachen in der unvermeidlichen Reibung in Verbindung mit mechanischen Messgeräten haben. Demzufolge wird sich der Zeiger bei steigender Anzeige jeweils auf einen zu kleinen und bei fallender Anzeige auf einen zu großen Wert einstellen. In diesem Zusammenhang spricht man auch von einer steigenden und fallenden Eichung. Nach Standard wird die Differenz der beiden Anzeigen für einen bestimmten Messwert als Umkehrspanne bezeichnet. Sie ist in der Angabe der Fehlergrenze enthalten.



Zufällige Fehler können auch durch unkontrollierbare Einwirkung der Umwelt entstehen. Unvermeidliche Temperaturschwankungen der Messleitung einer Messeinrichtung mit Thermoelement und Drehspulgerät rufen z.B. unkontrollierbare Spannungsabfälle und damit eine Unsicherheit in der Messwertanzeige hervor.
Weitere subjektive Fehler entstehen durch die Mitwirkung des Menschen (z.B. bei der Betätigung einer Stoppuhr zwecks Zeitmessung oder bei dem Ablesen von Messwerten an analogen Anzeigegeräten).

Ein oft auftretender subjektiver Fehler ist das Verschätzen der Unterteilung eines Skalenschritts. Dabei wird der Fehler oft durch einseitige Beleuchtung und durch nicht senkrechtes Ablesen (parallaktischer Fehler) vergrößert. Präzisionsgeräte haben deshalb unter der Skale einen Spiegel. Deckt sich das Zeigerbild mit dem Spiegelbild, hat das Auge des Beobachters die richtige Stellung. Eine Verbesserung des Ablesens kann · durch die Verwendung eines Nonius oder einer Ableselupe erreicht werden. Es hat aber wenig Sinn, die Ablesung hinsichtlich des möglichen Fehlers zu übertreiben. Der Ablesefehler sollte sich etwa in der Größenordnung der Fehlergrenze bewegen.

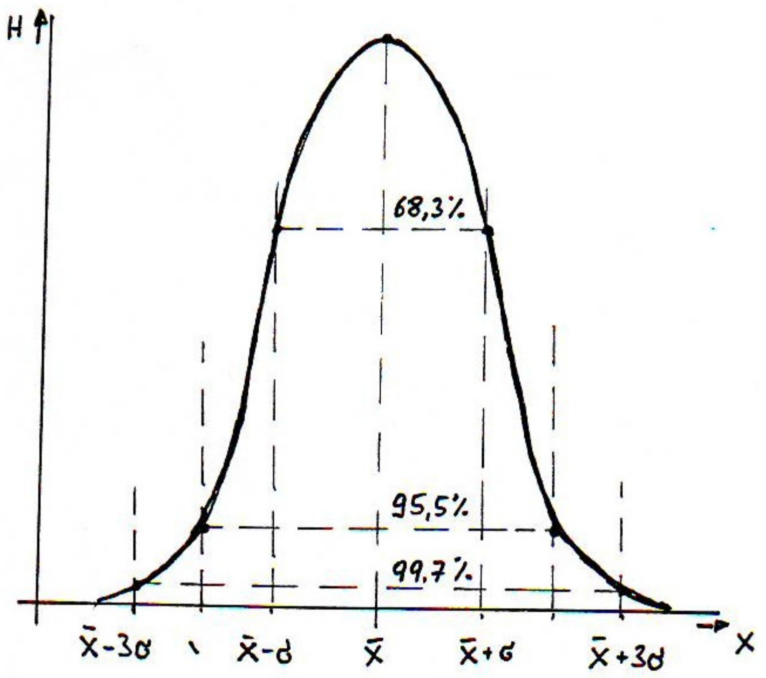
Bei den Betriebsmessmitteln ist die Trennung in systematische und zufällige Fehler zur Angabe der Korrektur und der Messunsicherheit meist nicht möglich. Zur Fehlerabschätzung geht man von der Fehlergrenze und dem möglichen Zusatzfehler aus, der durch vom Nennbetrieb abweichende Einsatzbedingungen entsteht.

Zufällige Fehler werden hervorgerufen durch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen der Messgeräte, des Beobachters und der Umwelt. Betrag und Vorzeichen dieser definitionsgemäß nicht vorhersehbaren Fehler können im einzelnen nicht angegeben werden.
Die Folge ist, dass die wiederholte Messung ein und derselben Messgröße unterschiedliche, streuende Messwerte ergibt. In diesen Fällen wird aus dem Messwert x_i der Mittelwert $\overline{x}$ gebildet und dieser wird als der Erwartungswert der Messgröße, als der wahre Messwert x_w angesehen:

$$\bar{X} = X_W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{für } N \to \infty$$

X_i = EINZELNER MESSWERT
$\bar{X}$ = MITTELWERT
X_W = WAHRE MESSWERT (ERWARTUNGSWERT)

Waren genügend viele voneinander unabhängige Einflussgrößen wirksam und wurden genügend viele Einzelmessungen durchgeführt, so sind die Messwerte normalverteilt.



H = Häufigkeit
σ = VARIANZ (STREUUNG)

68% aller Messwerte liegen

im Bereich von X = ∓ σ!

Zur exakten Fehlerabschätzung sind mathematische Methoden unumgänglich.

Ausgleichsrechnung

Um die Größe des zufälligen Fehlers abzuschätzen, wird eine Messung unter gleichen Bedingungen mehrfach wiederholt oder kurz eine Messreihe aufgenommen. Nach *Gauß* (1777 bis 1855) gilt zur Berechnung des wahrscheinlichen Wertes *D* einer Größe *M* die Bedingung, dass die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler ein Minimum
werden muss.

Sind M_1 bis M_n die $\boxed{f_i^* = M_i - M}$ einzelnen Ablesungen, ist der scheinbare Fehler $\boxed{f_i = M_i - D}$. Der wahre Fehler würde sein.

$$\boxed{\sum f_i^2 = (M_1 - D)^2 + (M_2 - D)^2 + (M_3 - D)^2 + \ldots + (M_n - D)^2.}$$

Die erste Ableitung $\boxed{\mathrm{d}\,\Sigma\, f_i^2}$ nach *dD* wird gleich Null gesetzt.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\Sigma f_i^2}{\mathrm{d}D} &= -2\,[(M_1 - D) + (M_2 - D) \\ &\quad + (M_3 - D) + \ldots + (M - D)] = 0.\end{aligned}}$$

Führt man mit *n* die Anzahl der Messungen ein, gilt

oder

$$\boxed{\begin{aligned}&\Sigma\, M_i - nD = 0 \\ &D = \overline{M} = \frac{\Sigma\, M_i}{n}.\end{aligned}}$$

Folglich ist der aus der Mathematik bekannte arithmetische Mittelwert $\overline{M}$ der Wert *D* einer Messreihe, der nach der Wahrscheinlichkeit dem Wert *M* am nächsten kommt.

Die Streuung der Einzelmesswerte um ihren Mittelwert $\overline{M}$ wird als Standardabweichung *s* bezeichnet. Sie ist definiert

$$\boxed{s = \pm \sqrt{\frac{\Sigma f_i^2}{n-1}}\,;}$$

s Standardabweichung, f_i scheinbarer Fehler = $M_i - \overline{M}$, *n* Anzahl der Messungen, M_i Einzelmessung, $\overline{M}$ wahrscheinlicher Näherungswert oder arithmetischer Mittelwert.
Für numerische Berechnungen wird oft ein anderer Ausdruck verwendet:

$$\boxed{s = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\Sigma M_i^2 - n\overline{M}^2\right)}\,.}$$

FEHLERRECHNUNG "ZUFÄLLIGER FEHLER"

$$\boxed{f_i = M_i - D}$$ SCHEINBARE FEHLER

$D =$ WAHRSCHEINLICHE WERT EINER GRÖSSE M

$M_i =$ EINZELNE MESSGRÖSSE AUS EINER REIHE $M_1 - M_n$

$$\boxed{D = \bar{M} = \frac{\sum_1 M_i}{n}}$$ ARITHMETISCHE MITTELWERT EINER MESSREIHE MIT n MESSUNGEN

$n =$ ANZAHL DER MESSUNGEN

$$\boxed{s = \pm\sqrt{\frac{\sum_1 f_i^2}{n-1}}}$$ VARIANZ; STANDARDABWEICHUNG

DIE STREUUNG DER EINZELMESSWERTE UM IHREN MITTELWERT $\bar{M}$ WIRD ALS STANDARDABWEICHUNG s BEZEICHNET.

BEISPIEL:

EINE MESSREIHE AUS ZEHN EINZELBEOBACHTUNGEN HAT FOLGENDE MESSWERTE ERGEBEN: 2,55 / 2,57 / 2,47 / 2,59 / 2,52 / 2,42 / 2,46 / 2,53 / 2,42 / 2,46

WIE GROSS IST DIE STANDARDABWEICHUNG?

MESSUNGEN n	MESSWERT M_i	FEHLER f_i	FEHLERQUADR. f_i^2
1	2,55	+0,051	0,00260
2	2,57	+0,071	0,00504
3	2,47	−0,029	0,00084
4	2,59	+0,091	0,00828
5	2,52	+0,021	0,00044
6	2,42	−0,079	0,00624
7	2,46	−0,039	0,00152
8	2,53	+0,031	0,00096
9	2,42	−0,079	0,00624
10	2,46	−0,039	0,00152
$\sum_1 M_i =$	24,99	$\sum_1 f_i^2 =$	$336{,}8 \cdot 10^{-4}$

$$f_i = M_i - \bar{M}$$

$$\bar{M} = \frac{\sum_1 M_i}{n} = \frac{24{,}99}{10} = 2{,}499$$

$$f_{i1} = 2{,}55 - 2{,}499$$

$$\underline{\underline{f_{i1} = +0{,}051}}$$

$$f_{i1}^2 = 0{,}051 \cdot 0{,}051$$

$$\underline{\underline{f_{i1}^2 = 0{,}00260}}$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum_1 f_i^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{336{,}8 \cdot 10^{-4}}{10-1}} = \pm 0{,}0612 \approx \pm 0{,}06$$

DAS ERGEBNIS DER SIEBTEN EINZELMESSUNG Z.B. LAUTET DANN:

$$\underline{\underline{M_7 = 2{,}46 \pm 0{,}06}}$$

ANMERKUNG: ZEHN EINZELMESSUNGEN SIND EIN RELATIV KLEINER WERT. DIE STANDARDABWEICHUNG s WIRD MIT ZUNEHMENDER ANZAHL n GENAUER.

DER ZUFÄLLIGE FEHLER KANN DANN IM MITTEL WIE FOLGT BESCHRIEBEN WERDEN:

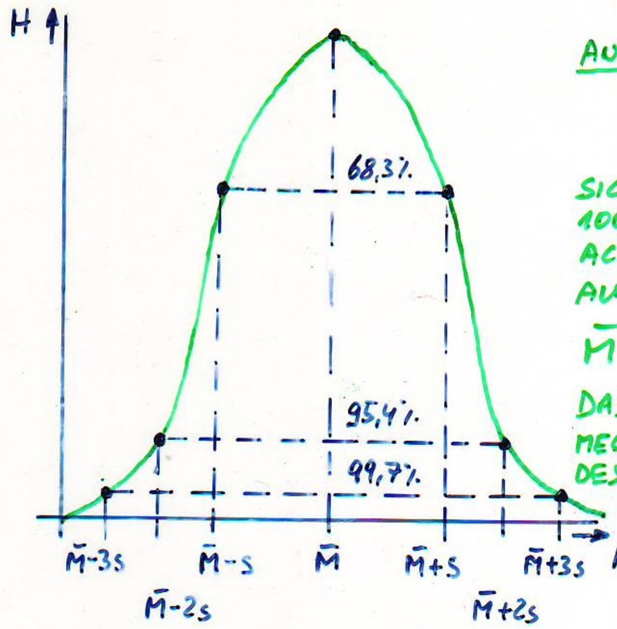
$$\boxed{f = \bar{M} \pm s}$$

$$f = 2{,}499 \pm 0{,}06 \quad \Rightarrow \quad f = 2{,}50 \pm 0{,}06$$

ES IST LEICHT EINZUSEHEN, DASS IM BEREICH $\bar{M} \pm s$ NICHT ALLE EINZELWERTE FÜR DIE GESUCHTE MESSGRÖSSE LIEGEN KÖNNEN.

WENN EINE NORMALE ZUFALLSVERTEILUNG (GAUSS) DER EINZELNEN WERTE VORLIEGT, FALLEN IM MITTEL VON 1000 UNABHÄNGIGEN EINZELWERTEN

683 IN DEN BEREICH $\bar{M} \pm 1s$ (STATISTISCHE SICHERH. P = 68,3 %)
954 IN DEN BEREICH $\bar{M} \pm 2s$ (" " P = 95,4 %)
997 " " " $\bar{M} \pm 3s$ (" " P = 99,7 %)



ANMERKUNG: IN DER INDUSTRIE BEVORZUGT MAN EINE STATISTISCHE SICHERHEIT VON P = 95%. VON 1000 UNABHÄNGIGEN BEOBACHTUNGEN FALLEN HIERBEI 50 AUSSERHALB DES BEREICHS

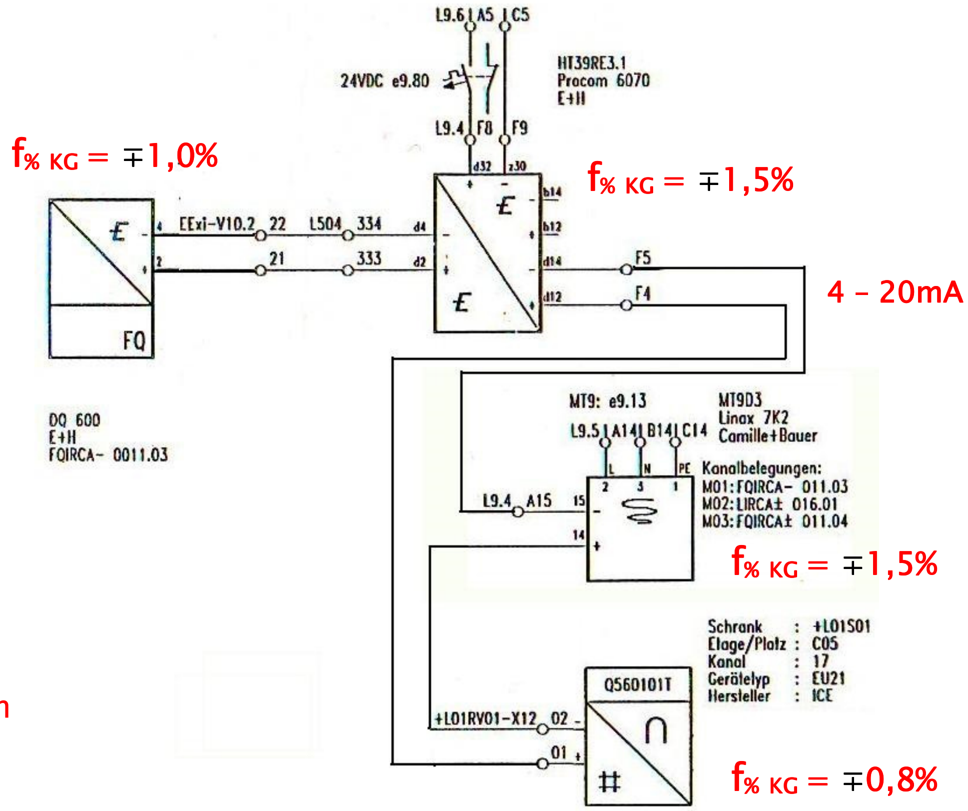
$\bar{M} \pm 1{,}96s$

DAS BEDEUTET, DASS VON 20 EINZELMESSWERTEN, EIN WERT AUSSERHALB DES BEREICHS LIEGT.

1.3.11 Fehlerfortpflanzung

In den wenigsten Fällen ist das Beobachtungsergebnis gleichzeitig das Endergebnis der Messung. Im allgemeinen setzt sich das Messergebnis aus verschiedenen Einzelmesswerten oder den beeinflussenden Elementen einer Messkette zusammen, die aber alle mit einem gewissen Fehler behaftet sind. Nun interessiert der Fehler des Resultates.

Beispiel einer klassischen Messkette:



Man unterscheidet nun zwei Fälle:

→ Fortpflanzung von systematischen Fehlern

→ Fortpflanzung von zufälligen Fehlern

Einfache Worst Case Betrachtungen scheiden als Mittel den Gesamtfehler zu ermitteln aus. Die Fortpflanzung des systematischen Fehlers, kann nicht durch einfaches addieren der Einzelfehler ermittelt werden, da die Einzelfehler sich durchaus gegenseitig aufheben können. Die Fehlerfortpflanzung des zufälligen Fehlers kann nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung versucht werden zu bestimmen.

Fehlerfortpflanzung

Voraussetzungen:

- Ein Messwert y hängt von einer bis mehreren Variablen ab: $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$
- Alle Änderungen Δx_n sind hinreichend gering.

Dann kann die Gesamtänderung Δy des Messwertes y als „Totales Differential" angegeben werden. Demnach gilt:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

mit Δx_1: einzelne Messfehler
n: Anzahl der unabhängigen Variablen

Wenn nun für den Messwert y folgender Zusammenhang gilt Produktfunktion):

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = {x_1}^{\alpha_1} \cdot {x_2}^{\alpha_2} \cdot \quad \cdot {x_n}^{\alpha_n}$$

Dann wird aus den Summanden des Totalen Differentials:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \alpha_1 {x_1}^{\alpha_1 - 1} \cdot {x_2}^{\alpha_2} \cdot \quad \cdot {x_n}^{\alpha_n} = \alpha_1 \frac{y}{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = {x_1}^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 {x_2}^{\alpha_2 - 1} \cdot \quad \cdot {x_n}^{\alpha_n} = \alpha_2 \frac{y}{x_2}$$

usw.

Damit folgt für das Totale Differential:

$$\Delta y = y(\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{x_n})$$

Gesetz der Fehlerfortpflanzung

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y} = (\alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \cdots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{x_n}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}\right)}$$

Der relative Fehler der Messwert Funktion, die ausschließlich als Produkt der unabhängigen Variablen angesehen werden kann, ergibt sich aus der Summe, der mit ihren Potenzen multiplizierten relativen Fehler der unabhängigen Variablen.

Beispiel: Fehlerfortpflanzung

Bestimmung des relativen Fehlers eines Widerstandswertes **R**. Hierfür gilt : $R = \frac{U}{I} = U \cdot I^{-1}$

d.h. α_1=1 und α_2=-1

Damit ergibt sich für das Totale Differential von R:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{\mathrm{I}}$$

Mit der Klassengenauigkeit des Beispiels vom Anfang folgt:

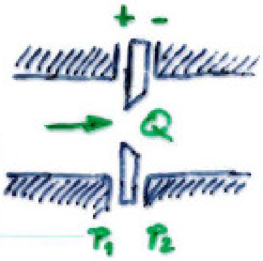
ΔU: Klasse 1,5
ΔI: Klasse 1

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}45V}{19V} - \frac{0{,}1\mathrm{mA}}{8\mathrm{mA}} = 0{,}0112 \ \triangleq \pm\mathbf{1{,}12\%}}$$

Beispiel: Fehlerfortpflanzung, systematischer Fehler

BEISPIEL ZUM THEMA "FORTPFLANZUNG VON SYSTEMATISCHEN FEHLERN"

DER GASSTROM IN EINER ROHRLEITUNG, WIRD MIT EINER NORMBLENDE BESTIMMT.



ES GILT:

$$\boxed{Q_V = 3{,}999\cdot 10^{-3}\cdot \alpha\cdot \varepsilon\cdot d^2\cdot\sqrt{\frac{\vartheta_0\cdot p}{p_0\cdot\vartheta}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\rho_0}}\cdot\sqrt{p_1-p_2}}$$

BEI EINEM WIRKDRUCK $p_1 - p_2 = 4000\,Pa$ IST EIN VOLUMENSTROM $Q_V = 1000\,m^3/h$ VORHANDEN.
DIE VORGESEHENE BETRIEBSTEMPERATUR WAR $\vartheta = 353\,K$ UND DER DRUCK $p = 142\,kPa$. WELCHER MESSFEHLER ENTSTEHT, WENN DIE TEMPERATUR AUF $\vartheta' = 363\,K$ STEIGT UND DER DRUCK AUF $140\,kPa = p'$ FÄLLT?

1. ZUSAMMENFASSUNG DER UNVERÄNDERLICHEN GRÖSSEN $\quad \underline{Q} = K\cdot\sqrt{\frac{p}{\vartheta}}$

α = DURCHFLUSSZAHL (ROHRLEITUNGEN, STOFFE = BEKANNT)
ε = EXPANSIONSZAHL
d = BLENDENÖFFNUNG
ρ = DICHTE
$\vartheta_0 = 273{,}15\,K$
$p_0 = 1013\,mbar$

2. PARTIELL DIFFERENZIERT

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{K}{2\cdot\sqrt{p}\cdot\sqrt{\vartheta}}\;,\qquad \frac{\partial Q}{\partial\vartheta} = -\frac{K\cdot\sqrt{p}}{2\cdot\sqrt{\vartheta^3}}$$

3. UND EINGESETZT

$$f_Q = \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot f_p + \frac{\partial Q}{\partial\vartheta}\cdot f_\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{K}{\sqrt{p}\cdot\sqrt{\vartheta}}\cdot f_p - \frac{1}{2}\,\frac{K\cdot\sqrt{p}}{\sqrt{\vartheta^3}}\cdot f_\vartheta$$

4. ZUR VEREINFACHUNG DES AUSDRUCKS WIRD DURCH $\underline{Q}$ GETEILT

$$\frac{f_Q}{Q} = \frac{1}{2}\,\frac{f_p}{p} - \frac{1}{2}\,\frac{f_\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{f_p}{p} - \frac{f_\vartheta}{\vartheta}\right)$$

$$Q = K\cdot\sqrt{\frac{p}{\vartheta}}$$

$$Q = K\cdot\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\vartheta}}$$

$$f_p = (140-142)\,kPa = -2\,kPa$$

$$f_\vartheta = (363-353)\,K = +10\,K$$

$$f_Q = \frac{1}{2}\cdot 1000\,m^3/h\left(\frac{-2\,kPa}{142\,kPa} - \frac{10\,K}{353\,K}\right)$$

$$\underline{\underline{f_Q = -21{,}2\,m^3/h}}$$

Fortpflanzung von zufälligen Fehlern

Gegeben ist ·die Funktion $u = \varphi\,(x; y; z)$. Die zugehörigen Standardabweichungen lauten s_u, s_x, s_y, s_z. Die gesamte Standardabweichung errechnet sich ebenfalls mit Hilfe der partiellen Ableitung. Man erhält als größtmöglichen Wert

<1>

$$s_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x} s_x\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y} s_y\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial z} s_z\right|$$

Die Betragswerte wurden deshalb eingesetzt, weil jede Standardabweichung das Vorzeichen +/- hat. Es ist erfahrungsgemäß anzunehmen, dass sich ein Teil der Unsicherheiten gegenseitig aufhebt. Somit ergibt sich nach *Gauß* als mittlere gesamte Standardabweichung

<2>

$$s_{m,u} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} s_z\right)^2}$$

Beispiel

Zur Ermittlung der Beizverluste wird das Beizgut vor und nach dem Beizen gewogen. Die Masse beträgt vor dem Beizen m_1 = (l000 ± 5) kg und nach dem Beizen m_2 = (960 ± 5) kg.

Wie groß ist der Beizverlust und dessen Standardabweichung?

Lösung

$$m_u = m_1 - m_2 = 1000\ \text{kg} - 960\ \text{kg} = 40\ \text{kg}$$

$$m_v = m_1 - m_2 = 1000\ \text{kg} - 960\ \text{kg} = 40\ \text{kg}$$

$$\frac{\partial m_v}{\partial m_1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial m_v}{\partial m_2} = -1$$

$$s_m = \sqrt{(1 \cdot 5\ \text{kg})^2 + (-1 \cdot 5\ \text{kg})^2} = \pm 7{,}07\ \text{kg}$$

Beizverlust m_u = (40 ± 7) kg.

$P_\% = \frac{5\,\text{kg} \cdot 100\%}{100\,\text{Kg}} = 0{,}5\%$

$P_\% = \frac{7\,\text{kg} \cdot 100\%}{40\,\text{kg}} = 17{,}5\%$

Zu beachten ist, dass bei diesen und ähnlichen Differenzmessungen hohe prozentuale
Messfehler auftreten (relative Standardabweichungen des Wägeprozesses +- 0,5 %, relative Standardabweichung des Messergebnisses +- 17,5 %). Das bedeutet, dass man solche Messungen entweder vermeiden oder noch sorgfältiger ausführen sollte.

Die zuvor genannten Gleichungen <1> und <2> gelten auch für den Fall, wenn anstelle der Standardabweichungen die relativen oder prozentualen Messunsicherheiten *u* der Einzelmessungen bekannt sind. Eine Abschätzung der Größenordnung der relativen Messunsicherheit ist möglich, wenn man von dem Grundfehler der Messgeräte ausgeht.
Für den Messausschlag gilt dann

$$u_{\mathrm{rel}} = \frac{f_{\mathrm{red}} \cdot \text{Meßbereich}}{\text{Sollwert}}$$

bzw.

$$u_{\mathrm{rel}} \approx \frac{f_{\mathrm{red}} \cdot \text{Meßbereich}}{\text{Istwert}}.$$

MESSUNSICHERHEIT = u
RELATIVE MESSUNS. = u_{rel}
KLASSENGENAUIGK. = f_{red}

Beispiel: Fehlerfortpflanzung, zufälliger Fehler

BEISPIEL ZUM THEMA "FORTPFLANZUNG VON ZUFÄLLIGEN FEHLERN"

AN EINEM MOTOR (DREHSTROM) WURDE DIE SCHEINLEISTUNG MIT HILFE VON STROM- UND SPANNUNGSMESSERN ERMITTELT. DIE WIRKLEISTUNG WURDE MIT EINEM LEISTUNGSMESSGERÄT GEMESSEN.

$U = 400V$	(KLASSENGENAUIGKEIT 1,5)	MESSBEREICH	0 - 400 V
$I = 30A$	(" 1,5)	"	0 - 100 A
$P_W = 16KW$	(" 1,5)	"	0 - 60 KW

ES IST DER LEISTUNGSFAKTOR ZU BERECHNEN UND DIE MITTLERE ABSOLUTE UNSICHERHEIT ZU ERMITTELN ($\lambda = \cos\varphi$)

1. $$\boxed{\cos\varphi = \frac{P_W}{U \cdot I \cdot \sqrt{3}}}$$

2. UM DAS TOTALE DIFFERENTIAL ZU ERHALTEN, WIRD ERST LOGARITHMIERT UND DANN DIFFERENZIERT:

$$\ln\cos\varphi = \ln P_W - \ln U - \ln I - \ln\sqrt{3}$$

$$\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{dP_W}{P_W} - \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

3. NACH DER GLEICHUNG FÜR DIE MITTLERE GESAMTE STANDARDABWEICHUNG FOLGT:

$$u_{\cos\varphi} = \cos\varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{u_{PW}}{P_W}\right)^2 + \left(\frac{-u_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{-u_I}{I}\right)^2}$$; MESSUNSICHERHEIT

4. DIE KLAMMERAUSDRÜCKE SIND WEITER NICHTS ALS DIE RELATIVEN MESSUNSICHERHEITEN.

$$\frac{u_U}{U} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 400V}{400V \cdot 100} = \pm 1{,}5 \cdot 10^{-2}$$ UNSICHERHEIT DER SPANNUNGSMESSUNG

$$\frac{u_I}{I} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 100A}{30A \cdot 100} = \pm 5{,}0 \cdot 10^{-2}$$ UNSICHERHEIT DER STROMMESSUNG

$$\frac{u_{PW}}{P_W} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 60KW}{16KW \cdot 100} = \pm 5{,}6 \cdot 10^{-2}$$ UNSICHERHEIT DER LEISTUNGSMESSUNG

5. DER BETRAG DES LEISTUNGSFAKTORS ERRECHNET SICH ZU

$$\cos\varphi = \frac{P_W}{U \cdot I \cdot \sqrt{3}}$$

$$\cos\varphi = \frac{16000\,W}{400\,V \cdot 30\,A \cdot \sqrt{3}} = 0{,}7698$$

6. FÜR DIE MITTLERE UNSICHERHEIT FOLGT:

$$f_{\cos\varphi} = 0{,}77\sqrt{(0{,}056)^2 + (-0{,}015)^2 + (0{,}05)^2}$$

$$f_{\cos\varphi} = \pm 0{,}059 \approx \pm 0{,}06$$

7. DAMIT LAUTET DAS ERGEBNIS:

$$\cos\varphi = 0{,}77 \pm 0{,}06$$