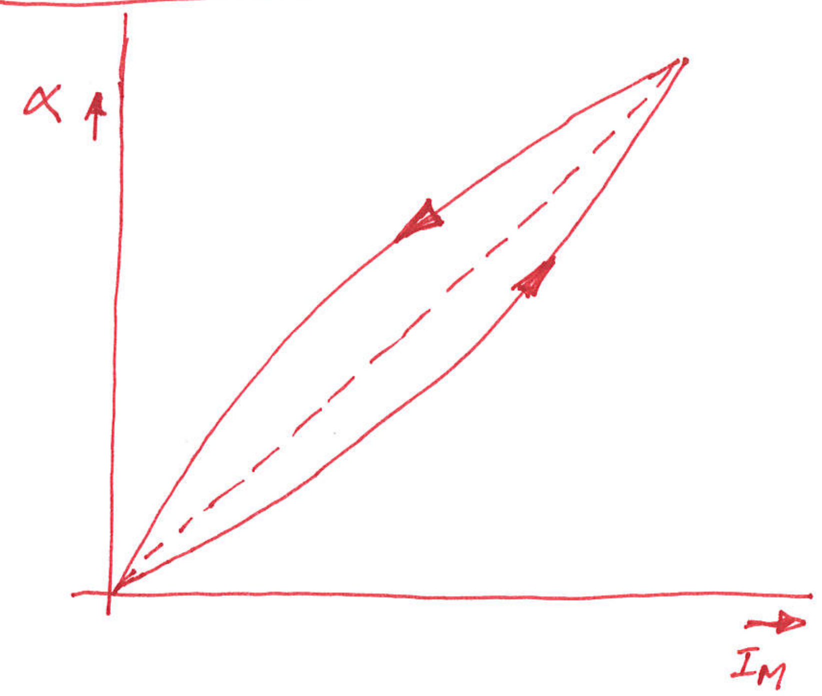
* UMKEHRSPANNE:



Die Stärke des reflektierten Signals wird beeinträchtigt durch:

1) Entfernungsdämpfung, d.h. das empfangene Radarsignal wird bei längeren Meßentfernungen schwächer.

2) Antennengröße, die die Leistungsfähigkeit erheblich beeinflußt. Eine größere Antenne liefert einen engeren Strahl und hat eine größere Empfangsoberfläche. Eine doppelte Fläche erhöht das Signal-Rausch-Verhältnis um mehr oder weniger das Sechsfache.

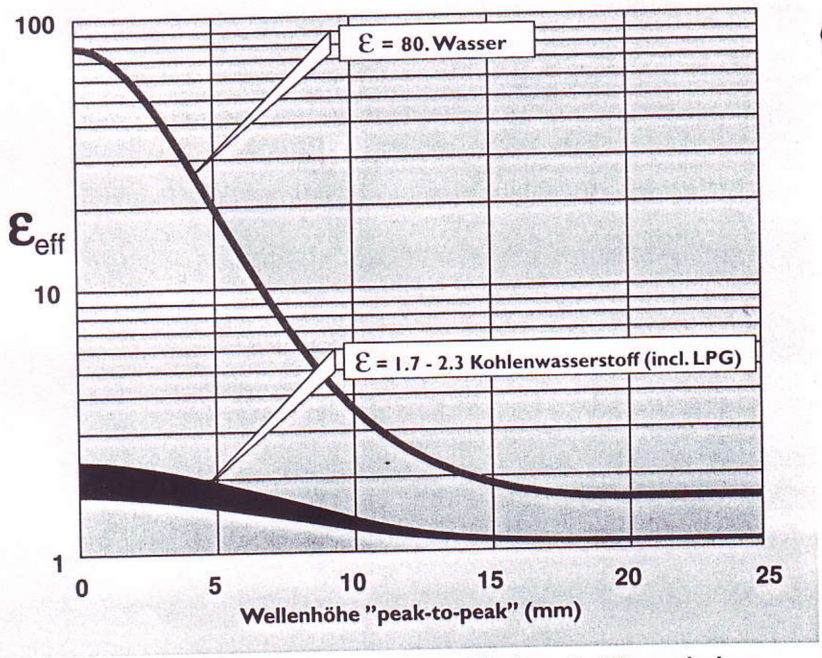
3) Oberflächenbedingungen wie Wellen und Turbulenzen können die reflektierte Energie vermindern. Für prozeßindustrielle Anwendungen ist es naheliegend, eine turbulente Oberfläche als Normalfall zu betrachten.

4) Die Dielektrizitätskonstante ε_R. Verschiedene Flüssigkeitsarten haben verschiedene Dielektrizitätskonstanten und können in zwei Gruppen unterteilt werden: „ölartige" und „wasserartige". Die erste Gruppe reflektiert nur einige Prozent der Mikrowellenenergie, die zweite strahlt einen Großteil der Energie zurück.

5) Schaum, der schlimmstenfalls das Echo komplett eliminieren kann, während er in anderen Fällen vollkommen vom Radar durchdrungen werden kann.

6) Dämpfe und Staub in der Tankatmosphäre beeinflussen die Leistung in ähnlicher Weise wie Schaum. Dieser Einfluß wird bei einer Frequenz von 10 GHz ausgeschaltet.

7) Schmutz an der Antenne, der wie Schaum die Leistung beeinträchtigt. Doch mit einem hochempfindlichen System wie der Saab TankRadar Pro und einer korrekt entworfenen und dimensionierten Antenne wird der Einfluß von Schmutz auf der Antenne auf ein Mindestmaß beschränkt.



Messungen auf einer turbulenten Wasserfläche mit 15 mm hohen Wellen entspricht Messungen auf einer ruhigen Fläche eines Kohlenwasserstoffes.

Bei der Konzeption und Entwicklung des Saab TankRadar Pro war man sich natürlich dieser Faktoren bewußt. Das Gerät kann folglich zuverlässige Meßergebnisse unter allen Bedingungen liefern. Kurz – es ist ein Füllstandsmeßgerät, auf das Sie sich in jeder Anwendung verlassen können.

2.6 *Schaltungsfehler*

Aus der Praxis kann man feststellen, daß die häufigsten Fehler beim Aufbau einer elektrischen Meßschaltung unter Verwendung eines elektrischen Meßgerätes für die direkte Messung von Strom und Spannung folgende Fehler sind:

- Falscher Meßbereich / AUCH BEI DIGITALMESSGERÄTEN !
- Meßgerät mit schlechter Klassengenauigkeit SIEHE S.15a
- Meßgeräte mit schlecht dimensionierten Innenwiderständen

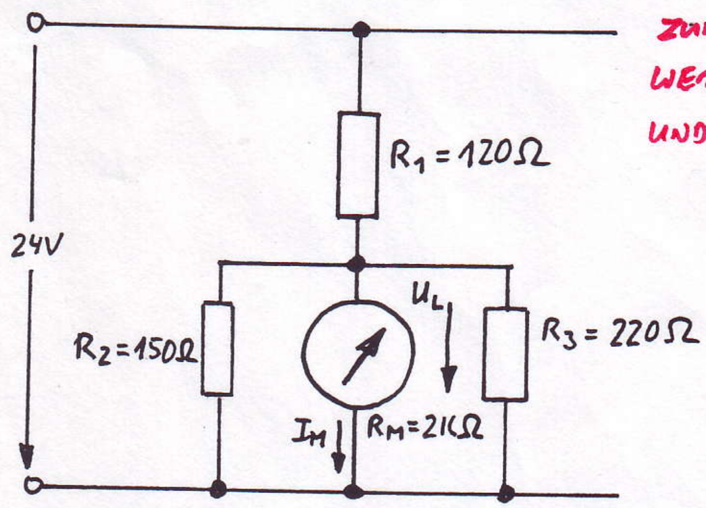
Bei analogen oder digitalen elektrischen Meßinstrumenten ist die Größe des Innenwiderstandes besonders wichtig.

Die Meßleistung ist möglichst klein zu halten !

Das heist: $P_M = U^2 / R_M$ oder $P_M = I^2 \cdot R_M$

Der Innenwiderstand eines Spannungsmeßgerätes sollte möglichst gegen unendlich streben, wohin der Innenwiderstand eines Strommeßgerätes möglichst gegen Null streben sollte.

Beispiel:



ZUM THEMA WAHRER WERT, ANGEZEIGTER WERT UND FEHLER

1. BESTIMMUNG DES WAHREN WERTES (SOLLWERT) W :

$$R_G = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 120\Omega + \frac{150\Omega \cdot 220\Omega}{150\Omega + 220\Omega} = 120\Omega + 89{,}19\Omega$$

$$R_G = 209{,}19\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{24V}{209{,}19\Omega} = 0{,}115A$$

$$U_L = I \cdot R_L' = 0{,}115A \cdot 89{,}19\Omega = \underline{\underline{10{,}23V}} = W$$

2. BESTIMMUNG DES ANGEZEIGTEN WERTES (ISTWERT) A

$$R_G = 120\Omega + \frac{1}{\frac{1}{150\Omega} + \frac{1}{2k\Omega} + \frac{1}{220\Omega}} = 120\Omega + 85{,}38\Omega$$

$$R_G = 205{,}38\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{24V}{205{,}38\Omega} = 0{,}1168A$$

$$U_L' = I \cdot R_L'' = 0{,}1168A \cdot 85{,}38\Omega = \underline{\underline{9{,}977V}} = A$$

WÄHLT MAN NUN EIN MESSGERÄT MIT EINEM MESSBEREICH VON 0-100V UND EINER KLASSENGENAUIGKEIT VON 2,5 SO ERGIBT SICH FOLGENDES BEISPIEL:

REL. FEHLER $= f_{\%} = 2{,}5\%$

$$\pm \Delta U = \pm \frac{2{,}5\%}{100\%} \cdot 100V$$

$$\pm \Delta U = 2{,}5V$$

$$U_L' \pm \Delta U = 9{,}98V \pm 2{,}5V \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} U'_{L\,min} = 7{,}48V \\ U'_{L\,max} = 12{,}48V \end{array}\right\}$$

UNSICHERHEITSBEREICH: IN DIESEM BEREICH WIRD SICH DER ZEIGER EINSTELLEN

FAZIT: DER MESSBEREICH IST VIEL ZU GROSS UND DAMIT FALSCH GEWÄHLT!

AUFGABE

GEG.: 4 1/2 STELLIGE ANZEIGE
MB = 200 V
GRÖSSTE ANZEIGE — 199,99 V
FEHLER: F = ± (0,5 % + 4 DIGITS)

GES: WELCHER PROZENTUALER FEHLER TRITT BEI EINER MESSANZEIGE VON 125,20 V AUF?

LÖSUNG: 1 BIS 3

⟹

Meßfehler ; *Digital-Meßgeräte*

Meßfehler
- Grundfehler
- Quantisierungsfehler

Beispiel:

Meßgerät $4\frac{1}{2}$ - stellige Anzeige
Meßbereich 200 V
Größte Anzeige 199,99 V
Fehler $F = \pm(0{,}5\% + 4 \text{ Digits})$
Welcher prozentuale Fehler tritt bei Meßanzeige 125,20 V auf?

199.99

Ziffern 0 bis 9 möglich
halbe Stelle, nur Ziffern 0 und 1 möglich

Lösung:

125.20

Grundfehler
$F_G = \pm 0{,}5\% \cdot 125{,}20 \text{ V}$
$= \pm 0{,}626 \text{ V}$

1 Anzeigeumfang 19 999 Digits, d. h. 20 000 Meßschritte zu je 10 mV

2 Quantisierungsfehler $F_Q = \pm 4 \cdot 10 \text{ mV} = \pm 0{,}04 \text{ V}$

Maximaler absoluter Fehler $F = \pm(0{,}626 + 0{,}04) \text{ V} = \pm 0{,}666 \text{ V}$

Maximaler relativer Fehler $f = \frac{F}{x} = \frac{\pm 0{,}666 \text{ V}}{125{,}20 \text{ V}} = \pm 0{,}53\%$

Digitale Meßgeräte

Digital anzeigende Meßgeräte vermitteln durch die eindeutige Anzeige meist den Eindruck, daß sie den Meßwert absolut richtig anzeigen. Da aber auch diese Geräte toleranzbehaftete Bauteile enthalten, muß auch ihre Anzeige Meßunsicherheiten enthalten. Die Genauigkeit von Digitalgeräten entspricht aber meist der von analog arbeitenden Feinmeßgeräten. Angaben über die Genauigkeit von digitalen Meßgeräten finden sich üblicherweise in der Bedienungsanleitung.

Fehlerarten

Bei Digitalmeßgeräten unterscheidet man Grund- und Quantisierungsfehler. Der Grundfehler entsteht durch die toleranzbehafteten Bauteile des Analog-Digital-Wandlers; er wird in Prozent vom angezeigten Meßwert angegeben und beträgt meist 0,5 % bis 1 %. Der Quantisierungsfehler beruht auf der mehr oder weniger großen Auflösung des A/D-Wandlers; er beträgt 1 bis 5 Digits. Der absolute Fehler hängt dann vom Wert eines Digits ab. Die Angabe des zulässigen Gesamtfehlers kann z. B. $F_{max} = \pm(0{,}5\% + 2 \text{ Digit})$ lauten.
Hinweis: In Betriebsanleitungen wird häufig der zulässige Gesamtfehler als Grundfehler bezeichnet.

1 0–19999 DIGITS => 20000 MESSSCHRITTE

MESSBEREICH 200V

⇓

$$\frac{\text{MESSBEREICH}}{\text{MESSSCHRITTE}} = \frac{200\text{V}}{20000} = 10\text{mV}/\text{DIGIT} \Rightarrow 2$$

BEISPIEL:

Digitale Widerstandsbestimmung

Ein 4stelliges, digitales Meßgerät hat sich bei der Messung eines Widerstandes automatisch auf den Meßbereich 30 kΩ eingestellt. Die Meßunsicherheit beträgt ± (0,2 % + 6 Digits). Das Display macht die Anzeige 12.34 kΩ. Berechnen Sie die prozentualen Fehler und den minimalen und maximalen Widerstandswert, wenn die Auflösung 3000 Digits beträgt.

: Digitale Widerstandsbestimmung

Relativer Grundfehler: $f_G = \pm 0{,}2\,\%$ (vom Anzeigewert)

Absoluter Grundfehler: $F_G = \pm 0{,}2\,\% \cdot 12{,}34\,\mathrm{k\Omega} \approx \pm 25\,\Omega$

Abs. Digitalisierungsf.: $F_D = \pm 6\,\mathrm{Digits} \cdot 0{,}01 \dfrac{\mathrm{k\Omega}}{\mathrm{Digits}} = \pm 60\,\Omega$

Rel. Digitalisierungsf.: $f_D = \pm \dfrac{60\,\Omega}{12{,}34\,\mathrm{k\Omega}} \cdot 100\,\% \approx \pm 0{,}5\,\%$

Absoluter Gesamtfehler: $F = \pm$ **85 Ω**

Relativer Gesamtfehler: $f = \pm$ **0,7%**

Unsicherheitsbereich: **12255** Ω bis **12425** Ω

GRÖSSTE ANZEIGE

MESSBEREICH: 30KΩ $\Rightarrow$ $\dfrac{30\,\mathrm{k\Omega}}{3000\ \mathrm{DIGITS}} = 0{,}01 \dfrac{\mathrm{k\Omega}}{\mathrm{DIGIT}}$

4 STELLIGE ANZEIGE UND MB = 30KΩ => AUFLÖSUNG 3000 DIGITS

[2. BEISPIEL ZUR FEHLERRECHNUNG]

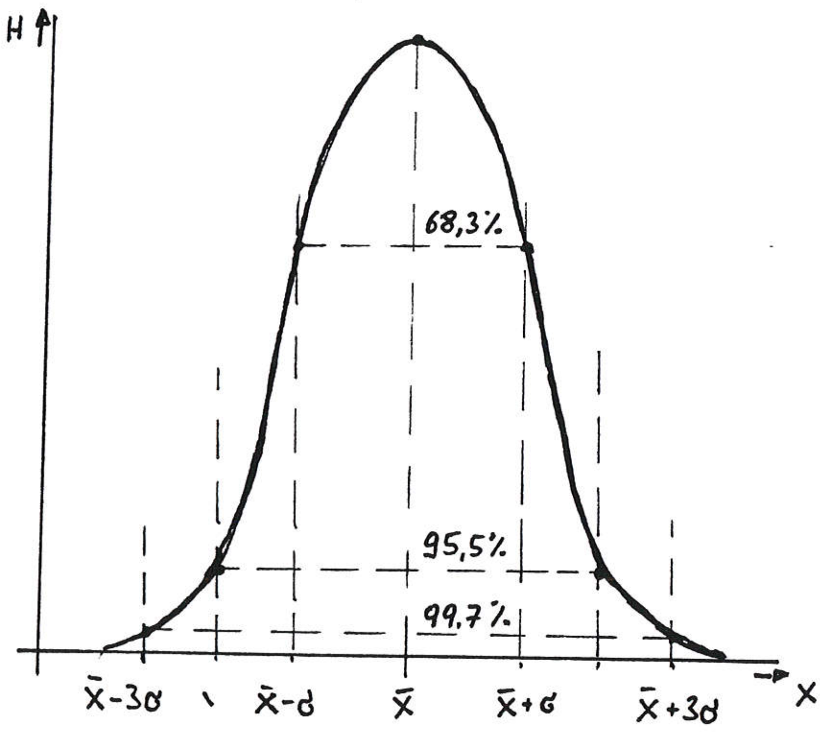
2.7 *Zufällige Fehler*

Zufällige Fehler werden hervorgerufen durch nicht erfaßbare und nicht beeinflußbare Änderungen der Meßgeräte, des Beobachters und der Umwelt.
Betrag und Vorzeichen dieser definitionsgemäß nicht vorhersehbaren Fehler können im einzelnen nicht angegeben werden.
Die Folge ist, daß die wiederholte Messung ein und derselben Meßgröße unterschiedliche, streuende Meßwerte ergibt. In diesen Fällen wird aus dem Meßwert $\mathbf{x_i}$ der Mittelwert $\bar{\mathbf{x}}$ gebildet und dieser wird als der Erwartungswert der Meßgröße, als der wahre Meßwert $\mathbf{x_w}$ angesehen:

$$\bar{x} = x_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{für } N \to \infty$$

x_i = EINZELNER MESSWERT
$\bar{x}$ = MITTELWERT
x_w = WAHRE MESSWERT (ERWARTUNGSWERT)

Waren genügend viele voneinander unabhängige Einflußgrößen wirksam und wurden genügend viele Einzelmessungen durchgeführt, so sind die Meßwerte normalverteilt.



H = Häufigkeit
σ = VARIANZ (STREUUNG)

68% ALLER MESSWERTE LIEGEN IM BEREICH $\bar{x} \pm \sigma$!

4.5. Fehlerrechnung "ZUFÄLLIGER FEHLER"

Zur exakten Fehlerabschätzung sind mathematische Methoden unumgänglich. Die nachstehenden Darstellungen beschränken sich auf die zwei wichtigsten Verfahren.

4.5.1. Ausgleichsrechnung

Um die Größe des zufälligen Fehlers abzuschätzen, wird eine Messung unter gleichen Bedingungen mehrfach wiederholt oder kurz eine Meßreihe aufgenommen. Nach *Gauß* (1777 bis 1855) gilt zur Berechnung des wahrscheinlichen Wertes D einer Größe M die Bedingung, daß die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler ein Minimum werden muß.

Sind M_1 bis M_n die einzelnen Ablesungen, ist der scheinbare Fehler $f_i = M_i - D$. Der wahre Fehler würde $f_i^* = M_i - M$ sein.

$$\sum f_i^2 = (M_1 - D)^2 + (M_2 - D)^2 + (M_3 - D)^2 + \ldots + (M_n - D)^2.$$

Die erste Ableitung d Σf_i^2 nach dD wird gleich Null gesetzt.

$$\frac{\mathrm{d}\,\Sigma f_i^2}{\mathrm{d}D} = -2\,[(M_1 - D) + (M_2 - D) + (M_3 - D) + \ldots + (M - D)] = 0.$$

Führt man mit n die Anzahl der Messungen ein, gilt

$$\Sigma M_i - nD = 0$$

oder

$$D = \overline{M} = \frac{\Sigma M_i}{n}. \tag{4.9}$$

Folglich ist der aus der Mathematik bekannte arithmetische Mittelwert $\overline{M}$ der Wert D einer Meßreihe, der nach der Wahrscheinlichkeit dem Wert M am nächsten kommt.

Die Streuung der Einzelmeßwerte um ihren Mittelwert $\overline{M}$ wird als Standardabweichung s bezeichnet. Sie ist definiert

$$s = \pm\sqrt{\frac{\Sigma f_i^2}{n-1}}; \tag{4.10a}$$

s Standardabweichung, f_i scheinbarer Fehler $= M_i - \overline{M}$, n Anzahl der Messungen, M_i Einzelmessung, $\overline{M}$ wahrscheinlicher Näherungswert oder arithmetischer Mittelwert.

Für numerische Berechnungen wird oft ein anderer Ausdruck verwendet:

$$s = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1}(\Sigma M_i^2 - n\overline{M}^2)}. \tag{4.10b}$$

FEHLERRECHNUNG "ZUFÄLLIGER FEHLER"

$\boxed{f_i = M_i - D}$ SCHEINBARE FEHLER

D = WAHRSCHEINLICHE WERT EINER GRÖSSE M

M_i = EINZELNE MESSGRÖSSE AUS EINER REIHE $M_1 - M_n$

$\boxed{D = \bar{M} = \frac{\sum_1^n M_i}{n}}$ ARITHMETISCHE MITTELWERT EINER MESSREIHE MIT n MESSUNGEN

n = ANZAHL DER MESSUNGEN

$\boxed{s = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^n f_i^2}{n-1}}}$ VARIANZ; STANDARDABWEICHUNG

DIE STREUUNG DER EINZELMESSWERTE UM IHREN MITTELWERT $\bar{M}$ WIRD ALS STANDARDABWEICHUNG s BEZEICHNET.

BEISPIEL:

EINE MESSREIHE AUS ZEHN EINZELBEOBACHTUNGEN HAT FOLGENDE MESSWERTE ERGEBEN: 2,55 / 2,57 / 2,47 / 2,59 / 2,52 / 2,42 / 2,46 / 2,53 / 2,42 / 2,46
WIE GROSS IST DIE STANDARDABWEICHUNG?

MESSUNGEN n	MESSWERT M_i	FEHLER f_i	FEHLERQUADR. f_i^2
1	2,55	+0,051	0,00260
2	2,57	+0,071	0,00504
3	2,47	−0,029	0,00084
4	2,59	+0,091	0,00828
5	2,52	+0,021	0,00044
6	2,42	−0,079	0,00624
7	2,46	−0,039	0,00152
8	2,53	+0,031	0,00096
9	2,42	−0,079	0,00624
10	2,46	−0,039	0,00152
$\sum_1^n M_i =$	24,99	$\sum_1^n f_i^2 =$	$336{,}8 \cdot 10^{-4}$

$f_i = M_i - \bar{M}$

$\bar{M} = \frac{\sum_1^n M_i}{n} = \frac{24{,}99}{10} = 2{,}499$

$f_{i_1} = 2{,}55 - 2{,}499$

$\underline{\underline{f_{i_1} = +0{,}051}}$

$f_{i_1}^2 = 0{,}051 \cdot 0{,}051$

$\underline{\underline{f_{i_1}^2 = 0{,}00260}}$

$$s = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^n f_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{336{,}8 \cdot 10^{-4}}{10-1}} = \pm 0{,}0612 \approx \pm 0{,}06$$

DAS ERGEBNIS DER SIEBTEN EINZELMESSUNG Z.B. LAUTET DANN:

$$\underline{\underline{M_7 = 2{,}46 \pm 0{,}06}}$$

ANMERKUNG: ZEHN EINZELMESSUNGEN SIND EIN RELATIV KLEINER WERT. DIE STANDARDABWEICHUNG s WIRD MIT ZUNEHMENDER ANZAHL n GENAUER.

DER ZUFÄLLIGE FEHLER KANN DANN IM MITTEL WIE FOLGT BESCHRIEBEN WERDEN:

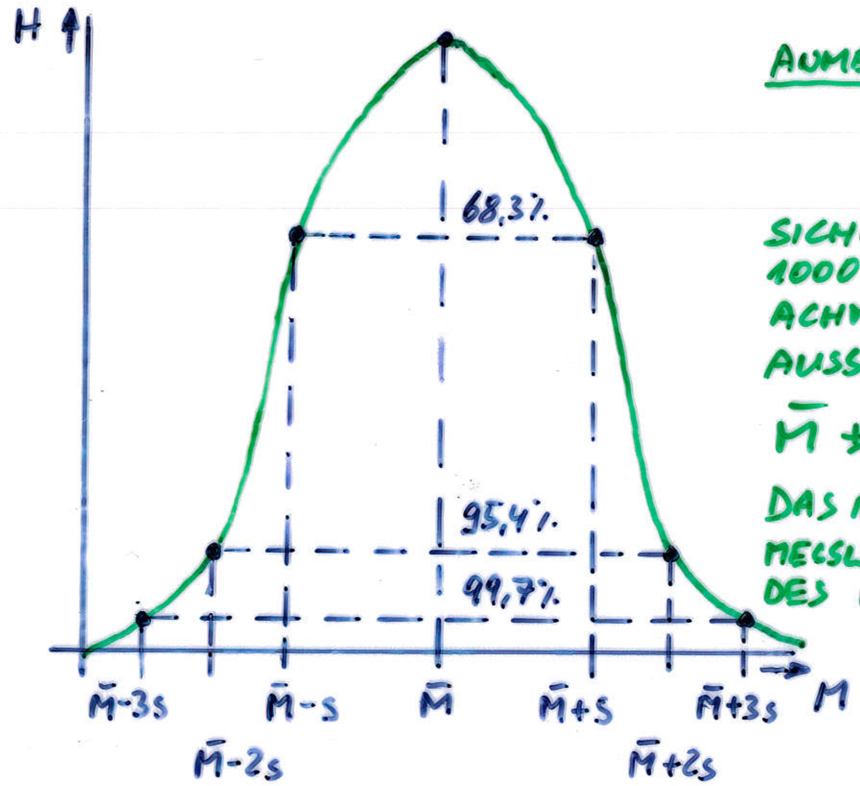
$$\boxed{f = \bar{M} \pm s}$$

$$f = 2{,}499 \pm 0{,}06 \quad \Rightarrow \quad f = 2{,}50 \pm 0{,}06$$

ES IST LEICHT EINZUSEHEN, DASS IM BEREICH $\bar{M} \pm s$ NICHT ALLE EINZELWERTE FÜR DIE GESUCHTE MESSGRÖSSE LIEGEN KÖNNEN.

WENN EINE NORMALE ZUFALLSVERTEILUNG (GAUSS) DER EINZELNEN WERTE VORLIEGT, FALLEN IM MITTEL VON 1000 UNABHÄNGIGEN EINZELWERTEN

683 IN DEN BEREICH $\bar{M} \pm 1s$ (STATISTISCHE SICHERH. $P = 68{,}3\,\%$)
954 IN DEN BEREICH $\bar{M} \pm 2s$ (" " $P = 95{,}4\,\%$)
997 " " " $\bar{M} \pm 3s$ (" " $P = 99{,}7\,\%$)



ANMERKUNG: IN DER INDUSTRIE BEVORZUGT MAN EINE STATISTISCHE SICHERHEIT VON $P = 95\,\%$. VON 1000 UNABHÄNGIGEN BEOBACHTUNGEN FALLEN HIERBEI 50 AUSSERHALB DES BEREICHS

$\bar{M} \pm 1{,}96s$

DAS BEDEUTET, DASS VON 20 EINZELMESSWERTEN, EIN WERT AUSSERHALB DES BEREICHS LIEGT.

Beispiel

Eine Meßreihe aus zehn Einzelbeobachtungen hat folgende Meßwerte ergeben: 2,55; 2,57; 2,47; 2,59; 2,52; 2,42; 2,46; 2,53; 2,42; 2,46. Wie groß ist die Standardabweichung?

Lösung

Zur Lösung derartiger Aufgaben empfiehlt es sich, tabellarisch vorzugehen:

Messung n	Meßwert M_i	Fehler f_i	Fehlerquadrat $10^4 f_i$
1	2,55	+0,051	26,0
2	2,57	+0,071	50,4
3	2,47	−0,029	8,4
4	2,59	+0,091	82,8
5	2,52	+0,021	4,4
6	2,42	−0,079	62,4
7	2,46	−0,039	15,2
8	2,53	+0,031	9,6
9	2,42	−0,079	62,4
10	2,46	−0,039	15,2
$\Sigma M_i =$	24,99	$\Sigma f_i^2 =$	$336{,}8 \cdot 10^{-4}$
$\overline{M} =$	2,499		

$f_i = M_i - \overline{M}$

z.B.:

$f_{i_1} = 2{,}55 - 2{,}499$

$f_{i_1} = \underline{+0{,}051}$

$f_{i_2} = 2{,}57 - 2{,}499$

$f_{i_2} = \underline{+0{,}071}$

$f_{i_1}^2 = 0{,}051 \cdot 0{,}051$

$f_{i_1}^2 = \underline{0{,}00260} = 26{,}0 \cdot 10^{-4}$

$f_{i_2}^2 = 0{,}071 \cdot 0{,}071$

$f_{i_2}^2 = \underline{0{,}00504} = 50{,}4 \cdot 10^{-4}$

Mit Gl. (4.10a)

$$s = \pm \sqrt{\frac{\Sigma f_i^2}{n-1}}$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{336{,}8 \cdot 10^{-4}}{10-1}} = \pm 0{,}0612 \approx \pm 0{,}06.$$

Das Ergebnis der siebenten Einzelmessung lautet dann

$$M_7 = 2{,}46 \pm 0{,}06.$$

Die Rundung des Rechenergebnisses der Standardabweichung auf eine Ziffer wurde deshalb durchgeführt, weil Gl. (4.10a) nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt wurde. Sie ist nur genau, wenn die Anzahl der Messungen unendlich groß ist. Man spricht dann von der Standardabweichung σ der Grundgesamtheit. Zehn Messungen sind demgegenüber ein relativ kleiner Wert.

Zur Darstellung des Meßergebnisses wird vereinbart, daß die Rundung wie folgt vorzunehmen ist: Die vorletzte Stelle muß verbürgt sein, die letzte Stelle darf um die Streuung unsicher sein.

Würde also das Meßergebnis einer Einzelmessung innerhalb einer Meßreihe von zehn Messungen lauten: $M = (2{,}523 \pm 0{,}061)$ MPa, dann ist sinnvoll zu schreiben $M = (2{,}52 \pm 0{,}06)$ MPa.

Es ist leicht einzusehen, daß im Bereich $\overline{M} \pm s$, also für das Zahlenbeispiel $2{,}50 \pm 0{,}06$, nicht alle Einzelwerte für die gesuchte Meßgröße liegen können. Wenn eine normale Zufallsverteilung (Gaußsche Verteilung) der einzelnen Werte vorliegt, fallen im Mittel von 1000 unabhängigen Einzelwerten

683 in den Bereich $\overline{M} \pm 1\,s$ (statistische Sicherheit $P = 68{,}3\,\%$)

954 in den Bereich $\overline{M} \pm 2\,s$ (statistische Sicherheit $P = 95{,}4\,\%$)

997 in den Bereich $\overline{M} \pm 3\,s$ (statistische Sicherheit $P = 99{,}7\,\%$).

In der Industrie bevorzugt man eine statistische Sicherheit von $P = 95\,\%$. Von 1000 unabhängigen Beobachtungen fallen hierbei 50 außerhalb des Bereichs $\overline{M} \pm 1{,}96\,s$. Das bedeutet, daß von 20 Einzelmeßwerten ein Wert außerhalb des Bereichs liegt.

Tafel 4.2. Faktor für die statistische Sicherheit in Abhängigkeit von der Anzahl der Einzelmessungen

Anzahl der Einzelwerte n	$P = 68{,}3\,\%$ $\overline{M} \pm 1s$ t	$P = 95\,\%$ $\overline{M} \pm 1{,}96s$ t	$P = 99\,\%$ t	$P = 99{,}73\,\%$ $M \pm 3s$ t
(2)	(1,8)	(12,7)	(64)	(235)
3	1,32	4,3	9.9	19,2
4	1,20	3,2	5,8	9,2
5	1,15	2,8	4,6	6,6
6	1,11	2,6	4,0	5,5
8	1,08	2,4	3,5	4,5
10	1,06	2,3	3,2	4,1
20	1,03	2,1	2,9	3,4
30	1,02	2,5	2,8	3,3
50	1,01	2,0	2,7	3,1
100	1,00	2,0	2,6	3,1
200	1,00	1,9	2,6	3,0

Eingeklammerte Werte sollen vermieden werden.

Der Beobachter darf nun nicht ohne weiteres annehmen, daß der Mittelwert $\overline{M}$ gleich dem gesuchten wahren Wert M der Meßgröße ist, der bei Abwesenheit von systematischen Fehlern aus einer sehr großen Anzahl von Einzelmeßwerten gewonnen werden kann. Es ist aber möglich, zwei Grenzen – oberhalb und unterhalb des geforderten Mittelwerts – anzugeben, zwischen denen der wahre Wert mit der gewählten statistischen Sicherheit P zu erwarten ist. Der eingeschlossene Bereich heißt Vertrauensbereich des Mittelwerts

$$\pm \frac{t}{\sqrt{n}} s; \tag{4.11}$$

s Standardabweichung, n Anzahl der Beobachtungen, t Faktor aus Tafel 4.2.

Das Ergebnis der Meßreihe lautet dann

$$\overline{M} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s$$

oder, wenn der Vertrauensbereich relativ zum Mittelwert ausgedrückt werden soll,

$$\overline{M} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \frac{s}{\overline{M}}.$$

Zur Rundung gilt sinngemäß das, was schon für die Einzelmessung vereinbart wurde.

Beispiel

a) Wie groß ist der Vertrauensbereich des Mittelwerts mit einer statistischen Sicherheit $P = 95\,\%$ im obigen Beispiel?
b) Wie lautet das Ergebnis der Meßreihe in sinnvoller Darstellung?

Lösung

Zu a) Aus Tafel 4.2 wird entnommen $t = 2{,}3$. Mit Gl. (4.11)

$$\pm \frac{t}{\sqrt{n}} s = \pm \frac{2{,}3}{\sqrt{10}} \cdot 0{,}0612 = 0{,}0441 = 1{,}765\,\%.$$

Zu b) Ergebnis $2{,}50 \pm 0{,}04$; $2{,}50 \pm 2\,\%$.

Mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt somit der Mittelwert zwischen 2,54 und 2,46.

Der Vertrauensbereich läßt sich – wie man aus Gl. (4.11) erkennen kann – einengen, wenn die Zahl der Beobachtungen genügend groß gewählt wird.
Die Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung bereitet größere Mühe, wenn der Durchschnitt $\overline{M}$ ein gebrochener Wert ist. Nachstehend soll ein Verfahren beschrieben werden, das schneller zum Ziel führt.

2. VERFAHREN

Nimmt man anstelle des errechneten Mittelwerts $\overline{M}$ einen geschätzten Näherungswert N an und rechnet mit dem auf N bezogenen Fehler w, dann ist $w_i = M_i - N$ usw. Zur Berechnung des Mittelwerts und der Summe der Fehlerquadrate ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\overline{M} = N + \frac{\Sigma w}{n} \tag{4.12a}$$

$$\Sigma f^2 = \Sigma w^2 - \frac{(\Sigma w)^2}{n}. \tag{4.12b}$$

Beispiel

Anhand des vorhergehenden Beispiels soll die Standardabweichung unter Verwendung eines geschätzten Näherungswerts berechnet werden.

$\boxed{w_i = M_i - N}$

$w_{i1} = 2{,}55 - 2{,}50 = +0{,}05$

$w_{i2} = 2{,}57 - 2{,}50 = +0{,}07$

$w_{i1}^2 = 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$

$w_{i2}^2 = 0{,}07 \cdot 0{,}07 = 0{,}0049$

Lösung

Der Näherungswert wird mit $N = 2{,}50$ angenommen.

Messung n	Meßwert M_1	Fehler w_1	Fehlerquadrat $10^4 w^2$
1	2,55	+0,05	25
2	2,57	+0,07	49
3	2,47	−0,03	9
4	2,59	+0,09	81
5	2,52	+0,02	4
6	2,42	−0,08	64
7	2,46	−0,04	16
8	2,53	+0,03	9
9	2,42	−0,08	64
10	2,46	−0,04	16
		$\sum w = -0{,}01$	$\sum w^2 = 337 \cdot 10^{-4}$

Mit Gl. (4.12a)

$$\overline{M} = N + \frac{\sum w}{n}$$

$$\overline{M} = 2{,}50 + \frac{-0{,}01}{10} = 2{,}499.$$

Mit Gl. (4.12b)

$$\sum f^2 = \sum w^2 - \frac{(\sum w)^2}{n}$$

$$\sum f^2 = 337 \cdot 10^{-4} - \frac{(0{,}01)^2}{10} = 336{,}9 \cdot 10^{-4}.$$

Mit Gl. (4.10a)

$$s = \sqrt{\frac{336{,}9 \cdot 10^{-4}}{10 - 1}} = \pm 0{,}0612.$$

4.5.2. Fehlerfortpflanzung

In den wenigsten Fällen ist das Beobachtungsergebnis gleichzeitig das Endergebnis der Messung. Im allgemeinen setzt sich das Meßergebnis aus verschiedenen Einzelmeßwerten zusammen, die aber alle mit einem gewissen Fehler behaftet sind. Nun interessiert der Fehler des Resultats. Man unterscheidet zwei Fälle.

4.5.2.1. Fortpflanzung von systematischen Fehlern

Gegeben sei die Funktion $u=\varphi(x;y;z)$. Die zugehörigen absoluten Fehler lauten f_u, f_x, f_y und f_z. Der Gesamtfehler f_u ist mit Hilfe der partiellen Ableitungen

3.
$$\varphi_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varphi_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

gemäß der Beziehungen für das totale Differential

4.
$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

bestimmbar, wenn die endlich kleinen Werte f eingesetzt werden:

5.
$$f_u = \frac{\partial u}{\partial x} f_x + \frac{\partial u}{\partial y} f_y + \frac{\partial u}{\partial z} f_z. \qquad (4.14)$$

1. GEGEBEN IST DIE FUNKTION: $u=f(x;y;z)$

2. DIE ZUGEHÖRIGEN ABSOLUTEN FEHLER SIND f_x ; f_y ; f_z UND GESAMT f_u

Beispiel

Der Gasstrom in einer Rohrleitung wird mit einer Normblende bestimmt. Es gilt

$$Q_{v0} = 3{,}999 \cdot 10^{-3} \alpha \varepsilon d^2 \sqrt{\frac{\Theta_0 p}{\Theta p_0}} \sqrt{\frac{1}{\varrho_0}} \sqrt{p_1 - p_2}.$$

Bei einem Wirkdruck $p_1 - p_2 = 4000$ Pa ist ein Volumenstrom $Q_{v0} = 1000\ \mathrm{m^3/h}$ vorhanden.
Die vorgesehene Betriebstemperatur war $\Theta = 353$ K und der Druck 142 kPa.
Welcher Meßfehler entsteht, wenn die Temperatur auf $\Theta = 363$ K steigt und der Druck auf 140 kPa fällt?

Lösung

Entsprechend der Aufgabenstellung werden in der Ausgangsgleichung die unveränderlichen Größen zusammengefaßt:

$$Q = K \sqrt{\frac{p}{\Theta}}.$$

α = DURCHFLUSSZAHL
(ERMITTELSEN BEI VERS. ROHRLEITUNGEN, STOFFE)

ε = EXPANSIONSZAHL

d = BLENDENÖFFNUNG

ϱ = DICHTE

Es wird partiell differenziert

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{K}{2\sqrt{p}\,\sqrt{\Theta}}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \Theta} = -\frac{K\sqrt{p}}{2\sqrt{\Theta^3}}$$

und, eingesetzt,

$$f_Q = \frac{\partial Q}{\partial p} f_p + \frac{\partial Q}{\partial \Theta} f_\Theta$$

$$f_Q = \frac{1}{2}\frac{K}{\sqrt{p}\,\sqrt{\Theta}} f_p - \frac{1}{2}\frac{K\sqrt{p}}{\sqrt{\Theta^3}} f_\Theta.$$

Um den Ausdruck noch weiter zu vereinfachen, wird durch Q geteilt:

$$\frac{f_Q}{Q} = \frac{1}{2}\frac{f_p}{p} - \frac{1}{2}\frac{f_\Theta}{\Theta}$$

oder

$$f_Q = \frac{1}{2} Q \left(\frac{f_p}{p} - \frac{f_\Theta}{\Theta}\right)$$

$$f_p = (140 - 142)\ \mathrm{kPa} = -2\ \mathrm{kPa}$$

$$f_\Theta = (363 - 353)\ \mathrm{K} = +10\ \mathrm{K}$$

$$f_Q = \frac{1}{2} \cdot 1000\ \mathrm{m^3/h} \left(\frac{-2\ \mathrm{kPa}}{142\ \mathrm{kPa}} - \frac{10\ \mathrm{K}}{353\ \mathrm{K}}\right)$$

$$f_Q = -21{,}2\ \mathrm{m^3/h}.$$

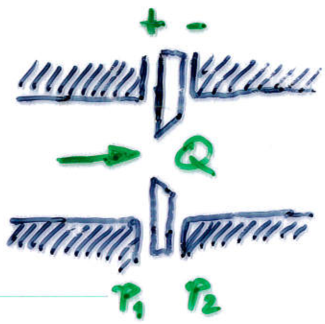
Um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten, ist es in vielen Fällen günstig, wenn vor dem Differenzieren der Ausdruck erst logarithmiert wird. Man erhält dann sofort den relativen Fehler

$$\ln Q = \ln K + 0{,}5 \ln p - 0{,}5 \ln \Theta$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = 0{,}5 \frac{\mathrm{d}p}{p} - 0{,}5 \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

BEISPIEL ZUM THEMA "FORTPFLANZUNG VON SYSTEMATISCHEN FEHLERN"

DER GASSTROM IN EINER ROHRLEITUNG,
WIRD MIT EINER NORMBLENDE BESTIMMT.



ES GILT:

$$\boxed{Q_V = 3{,}999 \cdot 10^{-3} \cdot \alpha \cdot \varepsilon \cdot d^2 \cdot \sqrt{\frac{\vartheta_0 \cdot p}{p_0 \cdot \vartheta}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varrho_0}} \cdot \sqrt{p_1 - p_2}}$$

BEI EINEM WIRKDRUCK $p_1 - p_2 = 4000\,Pa$ IST EIN VOLUMENSTROM $Q_V = 1000\,m^3/h$ VORHANDEN.
DIE VORGESEHENE BETRIEBSTEMPERATUR WAR $\vartheta = 353\,K$ UND DER DRUCK $p = 142\,kPa$. WELCHER MESSFEHLER ENTSTEHT, WENN DIE TEMPERATUR AUF $\vartheta' = 363\,K$ STEIGT UND DER DRUCK AUF $140\,kPa = p'$ FÄLLT?

1. ZUSAMMENFASSUNG DER UNVERÄNDERLICHEN GRÖSSEN $\quad \underline{Q} = K \cdot \sqrt{\frac{p}{\vartheta}}$

2. PARTIELL DIFFERENZIERT

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{K}{2 \cdot \sqrt{p} \cdot \sqrt{\vartheta}}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} = -\frac{K \cdot \sqrt{p}}{2 \cdot \sqrt{\vartheta^3}}$$

3. UND EINGESETZT

$$f_Q = \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot f_p + \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \cdot f_\vartheta = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{\vartheta}} \cdot f_p - \frac{1}{2} \frac{K \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{\vartheta^3}} \cdot f_\vartheta$$

4. ZUR VEREINFACHUNG DES AUSDRUCKS WIRD DURCH $\underline{Q}$ GETEILT

$$\frac{f_Q}{Q} = \frac{1}{2} \frac{f_p}{p} - \frac{1}{2} \frac{f_\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{2} Q \left(\frac{f_p}{p} - \frac{f_\vartheta}{\vartheta}\right)$$

$$f_p = (140 - 142)\,kPa = -2\,kPa$$

$$f_\vartheta = (363 - 353)\,K = +10\,K$$

$$f_Q = \frac{1}{2} \cdot 1000\,m^3/h \left(\frac{-2\,kPa}{142\,kPa} - \frac{10\,K}{353\,K}\right)$$

$$\underline{\underline{f_Q = -21{,}2\,m^3/h}}$$

α = DURCHFLUSSZAHL (ROHRLEITUNGEN, STOFFE = BEIWERT)
ε = EXPANSIONSZAHL
d = BLENDENÖFFNUNG
ϱ = DICHTE
$\vartheta_0 = 273{,}15\,K$
$p_0 = 1013\,mbar$

$$Q = K \cdot \sqrt{\frac{p}{\vartheta}}$$

$$Q = K \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\vartheta}}$$

4.5.2.2. Fortpflanzung von zufälligen Fehlern

Gegeben ist die Funktion $u = \varphi(x, y, z)$. Die zugehörigen Standardabweichungen lauten s_u, s_x, s_y, s_z. Die gesamte Standardabweichung errechnet sich ebenfalls mit Hilfe der partiellen Ableitung. Man erhält als größtmöglichen Wert

$$s_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x} s_x\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y} s_y\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial z} s_z\right|. \tag{4.15}$$

Die Betragswerte wurden deshalb eingesetzt, weil jede Standardabweichung das Vorzeichen $\pm$ hat. Es ist erfahrungsgemäß anzunehmen, daß sich ein Teil der Unsicherheiten gegenseitig aufhebt. Somit ergibt sich nach *Gauß* als mittlere gesamte Standardabweichung

$$s_{m,u} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} s_y\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} s_z\right)^2}. \tag{4.16}$$

Beispiel

Zur Ermittlung der Beizverluste wird das Beizgut vor und nach dem Beizen gewogen. Die Masse beträgt vor dem Beizen $m_1 = (1000 \pm 5)$ kg und nach dem Beizen $m_2 = (960 \pm 5)$ kg. Wie groß ist der Beizverlust und dessen Standardabweichung?

Lösung

$$m_v = m_1 - m_2 = 1000\ \text{kg} - 960\ \text{kg} = 40\ \text{kg}$$

$$\frac{\partial m_v}{\partial m_1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial m_v}{\partial m_2} = -1$$

$$s_m = \sqrt{(1 \cdot 5\ \text{kg})^2 + (-1 \cdot 5\ \text{kg})^2} = \pm 7{,}07\ \text{kg}$$

Beizverlust $m_v = (40 \pm 7)$ kg.

$P_{\%} = \frac{5\,\text{kg} \cdot 100\%}{100\,\text{Kg}} = 0{,}5\%$

$P_{\%} = \frac{7\,\text{kg} \cdot 100\%}{40\,\text{kg}} = 17{,}5\%$

Zu beachten ist, daß bei diesen und ähnlichen Differenzmessungen hohe prozentuale Meßfehler auftreten (relative Standardabweichungen des Wägeprozesses $\pm 0{,}5\%$, relative Standardabweichung des Meßergebnisses $\pm 17{,}5\%$). Das bedeutet, daß man solche Messungen entweder vermeiden oder noch sorgfältiger ausführen sollte.
Die Gln. (4.15) und (4.16) gelten auch für den Fall, wenn anstelle der Standardabweichungen die relativen oder prozentualen Meßunsicherheiten u der Einzelmessungen bekannt sind. Eine Abschätzung der Größenordnung der relativen Meßunsicherheit ist möglich, wenn man von dem Grundfehler der Meßgeräte ausgeht.
Für den Meßausschlag gilt dann

$$u_{\text{rel}} = \frac{f_{\text{red}} \cdot \text{Meßbereich}}{\text{Sollwert}}$$

bzw.

$$u_{\text{rel}} \approx \frac{f_{\text{red}} \cdot \text{Meßbereich}}{\text{Istwert}}.$$

MESSUNSICHERHEIT = u
RELATIVE MESSUNS. = u_{rel}
KLASSENGENAUIGK. = f_{red}

BEISPIEL ZUM THEMA "FORTPFLANZUNG VON ZUFÄLLIGEN FEHLERN"

AN EINEM MOTOR (DREHSTROM) WURDE DIE SCHEINLEISTUNG MIT HILFE VON STROM- UND SPANNUNGSMESSERN ERMITTELT. DIE WIRKLEISTUNG WURDE MIT EINEM LEISTUNGSMESSGERÄT GEMESSEN.

$U = 400V$	(KLASSENGENAUIGKEIT	1,5)	MESSBEREICH	0 - 400V
$I = 30A$	("	1,5)	"	0 - 100A
$P_W = 16kW$	("	1,5)	"	0 - 60kW

ES IST DER LEISTUNGSFAKTOR ZU BERECHNEN UND DIE MITTLERE ABSOLUTE UNSICHERHEIT ZU ERMITTELN ($\lambda = \cos\varphi$)

1. $\boxed{\cos\varphi = \frac{P_W}{U \cdot I \cdot \sqrt{3}}}$

2. UM DAS TOTALE DIFFERENTIAL ZU ERHALTEN, WIRD ERST LOGARITHMIERT UND DANN DIFFERENZIERT:

$$\ln \cos\varphi = \ln P_W - \ln U - \ln I - \ln \sqrt{3}$$

$$\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{dP_W}{P_W} - \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

3. NACH DER GLEICHUNG FÜR DIE MITTLERE GESAMTE STANDARDABWEICHUNG FOLGT:

$$u_{\cos\varphi} = \cos\varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{u_{P_W}}{P_W}\right)^2 + \left(\frac{-u_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{-u_I}{I}\right)^2}$$; MESSUNSICHERHEIT

4. DIE KLAMMERAUSDRÜCKE SIND WEITER NICHTS ALS DIE RELATIVEN MESSUNSICHERHEITEN.

$$\frac{u_U}{U} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 400V}{400V \cdot 100} = \pm 1{,}5 \cdot 10^{-2}$$ UNSICHERHEIT DER SPANNUNGSMESSUNG

$$\frac{u_I}{I} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 100A}{30A \cdot 100} = \pm 5{,}0 \cdot 10^{-2}$$ UNSICHERHEIT DER STROMMESSUNG

$$\frac{u_{P_W}}{P_W} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 60kW}{16kW \cdot 100} = \pm 5{,}6 \cdot 10^{-2}$$ UNSICHERHEIT DER LEISTUNGSMESSUNG

5. DER BETRAG DES LEISTUNGSFAKTORS ERRECHNET SICH ZU

$$\cos\varphi = \frac{P_W}{U \cdot I \cdot \sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{\cos\varphi}} = \frac{16000\,W}{400\,V \cdot 30\,A \cdot \sqrt{3}} = \underline{\underline{0{,}7698}}$$

6. FÜR DIE MITTLERE UNSICHERHEIT FOLGT:

$$f_{\cos\varphi} = 0{,}77 \sqrt{(0{,}056)^2 + (-0{,}015)^2 + (0{,}05)^2}$$

$$\underline{\underline{f_{\cos\varphi}}} = \pm 0{,}059 \approx \underline{\underline{\pm 0{,}06}}$$

7. DAMIT LAUTET DAS ERGEBNIS:

$$\underline{\underline{\cos\varphi = 0{,}77 \pm 0{,}06}}$$

Beispiel

An einem Drehstrommotor wurde die Scheinleistung in Verbindung mit Volt- und Amperemeter gemessen: $U = 400\ \mathrm{V}$; $I = 30\ \mathrm{A}$. Das Wattmeter zeigte eine Wirkleistung von $P_w = 16\ \mathrm{kW}$ an.
Es sind der Leistungsfaktor zu berechnen und die mittlere absolute Unsicherheit zu ermitteln ($\lambda = \cos\varphi$).
Es wird angenommen, daß jedes Gerät eine Fehlerklasse von 1,5 aufweist. Der Meßbereich des Voltmeters betrug 0 bis 400 V, der des Amperemeters 0 bis 100 A und der des Wirkleistungsmessers 0 bis 60 kW.

Lösung

Der physikalische Sachverhalt wird durch die Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{P_w}{UI\sqrt{3}}$$

beschrieben. Um das totale Differential zu erhalten, wird zuerst logarithmiert und dann differenziert:

$$\ln\cos\varphi = \ln P_w - \ln U - \ln I - \ln\sqrt{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\mathrm{d}P_w}{P_w} - \frac{\mathrm{d}U}{U} - \frac{\mathrm{d}I}{I}.$$

Analog zu Gl. (4.16) läßt sich schreiben

$$u_{\cos\varphi} = \cos\varphi\sqrt{\left(\frac{u_{Pw}}{P_w}\right)^2 + \left(\frac{-u_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{-u_I}{I}\right)^2}.$$ MESSUNSICHERHEIT

Die Klammerausdrücke sind weiter nichts als die relativen Meßunsicherheiten.
Unsicherheit der Spannungsmessung mit Gl. (4.8 b):

$$\frac{u_U}{U} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 400\ \mathrm{V}}{400\ \mathrm{V} \cdot 10^2}$$

$$\frac{u_U}{U} = \pm 1{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Unsicherheit der Strommessung:

$$\frac{u_I}{I} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 100\ \mathrm{A}}{30\ \mathrm{A} \cdot 10^2}$$

$$\frac{u_I}{I} = \pm 5{,}0 \cdot 10^{-2}.$$

Unsicherheit der Leistungsmessung:

$$\frac{u_{\mathrm{Pw}}}{P_{\mathrm{w}}} = \frac{\pm 1{,}5 \cdot 60\ \mathrm{kW}}{16\ \mathrm{kW} \cdot 10^2}$$

$$\frac{u_{\mathrm{Pw}}}{P_{\mathrm{w}}} = \pm 5{,}6 \cdot 10^{-2}.$$

Der Betrag des Leistungsfaktors errechnet sich zu

$$\cos\varphi = \frac{P_{\mathrm{w}}}{UI\sqrt{3}} = \frac{16000\ \mathrm{W}}{400\ \mathrm{V} \cdot 30\ \mathrm{A} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\cos\varphi = 0{,}7698,$$

und, in die Beziehung für die mittlere Unsicherheit eingesetzt,

$$f_{\cos\varphi} = 0{,}77\sqrt{(0{,}056)^2 + (-0{,}015)^2 + (-0{,}05)^2}$$

$$f_{\cos\varphi} = \pm 0{,}059 \approx \pm 0{,}06.$$

Damit lautet das Ergebnis

$$\cos\varphi = 0{,}77 \pm 0{,}06.$$

$$u_{\cos\varphi} = \cos\varphi \cdot \sqrt{\left(\frac{u_{Pw}}{P_w}\right)^2 + \left(\frac{-u_u}{U}\right)^2 + \left(\frac{-u_I}{I}\right)^2}$$